INSTITUTO DE FÍSICA

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

Aspectos de Factorización en Mecánica Clásica y Cuántica y en Cosmología

Tesis

que presenta el

Lic. Daniel Jiménez Alvarez

para obtener el grado de

Maestro en Física

Asesores:

Dr. Marco Antonio Reyes Santos

Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato

Dr. Haret Codratian Rosu Barbus

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica

León, Gto., Junio del 2003

Resumen

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden se encuentran entre las más recurrentes en la física matemática. El método de factorización es una herramienta que se ha mostrado como muy útil para el manejo y análisis de dichas ecuaciones, desde su uso en los albores de la mecánica cuántica por Schrödinger [1], y el extenso trabajo de Infeld y Hull [2]. En el presente trabajo se introduce el uso de operadores de escalera para las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la física matemática, una factorización general que, como es bien sabido, proporciona las eigenfunciones inmediatas o precedentes a una eigenfunción dada para un operador del tipo Sturm-Liouville. Después se introduce el trabajo de Mielnik sobre soluciones isoespectrales al Hamiltoniano "normal"del oscilador cuántico unidimensional. Nuestro trabajo consiste en aplicar la solución tipo Mielnik a algunas de las ecuaciones más conocidas de la física matemática, encontrándose eigenfunciones ioespectrales a las funciones referidas. Posteriormente se hace extensivo el uso de la factorización en supersimetría y cosmología, citándose algunos aspectos que no han sido completamente cubiertos en la literatura.

Índice

1. El método de factorización

Factorizar significa separar un producto en sus componentes. Si se tiene un polinomio de n-ésimo grado de una variable real, algunas veces es posible factorizarlo en dos o más polinomios reales cuya suma de grados es igual a n. Igualmente, un operador diferencial lineal de n-ésimo orden en determinadas circunstancias puede factorizarse en operadores diferenciales lineales de orden menor.

1.1. Operadores de escalera. Operadores de creación y aniquilación

El método de factorización para operadores diferenciales de segundo orden consiste en una idea sencilla que ha sido usada desde los inicios de la mecánica cuántica [1], y que, pese al lapso considerable de tiempo transcurrido desde entonces, ha mostrado ser de gran utilidad y sigue rindiendo muchos frutos aún ahora.

La idea puede resumirse como sigue: para un operador diferencial lineal de segundo orden, L, con eigenvalores y eigenfunciones de la forma[1]

$$Lv_\lambda = \lambda v_\lambda$$

donde L es el operador

$$L \equiv P(x)\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)\frac{d}{dx} + R(x)\,,$$

y λ es el eigenvalor correspondiente a la eigenfunción v_λ, se asume que existen operadores diferenciales de primer orden, llamados de escalera por el efecto que ejercen sobre las eigenfunciones, al transformar la eigenfunción v_λ por una nueva función v_μ, donde μ es el eigenvalor elevado o disminuido en una unidad con respecto a λ. Estos operadores diferenciales son también lineales, de la forma:

$$u(x)\frac{d}{dx} + f(x)$$

[1]La forma general de un operador de Sturm-Liouville incluye una función de peso que por el momento no es relevante para introducir el tema.

donde $u(x)$ y $f(x)$ son funciones a determinar. El operador L se puede descomponer entonces en el producto de dos operadores de escalera, más una constante, i.e.,

$$\left(u(x)\frac{d}{dx}+f(x)\right)\left(v(x)\frac{d}{dx}+g(x)\right)+c$$

No siempre se pueden obtener operadores de escalera para una ecuación diferencial de segundo orden dada, e incluso es posible encontrar factorizaciones en donde los operadores que factorizan no son de primer orden, como ha sido mostrado en trabajos previos [3]. Sin embargo, el método de factorizacion ha mostrado ser fructífero en diferentes áreas de la física, como el análisis espectral, amplitudes de transición, etc., y supersimetría. Es, precisamente, en esta última área donde los resultados han arrojado luces insospechadas y nuevas áreas de investigación.

En mecánica cuántica, el método de factorización se mostró como una herramienta muy poderosa especialmente para la obtención de espectros de energías en problemas de eigenvalores: en principio, uno puede obtener la ecuación diferencial correspondiente y factorizarla en operadores de escalera. En la nomenclatura de mecánica cuántica, estos operadores serán llamados ahora operadores de *creación* y de *aniquilación*, por su acción de crear o aniquilar un *cuanto* en el espectro de energías al llevar a nuevas eigenfunciones. Una vez conocidos estos operadores –y aquí reside su gran poder–, su aplicación sucesiva puede ayudar a obtener cualquier eigenfunción deseada en el espacio de estos operadores, y de esta manera obtener todo el espectro de energías.

En el Capítulo 2 introduciremos la factorización clásica de operadores del tipo Sturm-Liouville *a la* Piña [4], presentando explícitamente los operadores de escalera para algunas ecuaciones de la física matemática conocidas, y después de presentar el trabajo de Mielnik [5] sobre funciones isoespectrales al oscilador cuántico unidimensional, aplicaremos su método a las ecuaciones diferenciales referidas, obteniendo funciones isoespectrales a ellas. En el Capítulo 3 veremos algunos aspectos relevantes de la factorización supersimétrica, y en el Capítulo 4 extenderemos el método de factorización a la cosmología, donde en particular se tratarán las cosmologías barotrópicas Friedman-Robertson-Walker (FRW). Finalmente, las conclusiones y perspectivas al trabajo son presentadas en el Capítulo 5.

2. Factorización en mecánica clásica y mecánica cuántica

Muchas ecuaciones diferenciales de la mecánica clásica y la mecánica cuántica son ecuaciones lineales de segundo orden, que pueden ser factorizadas en dos operadores de primer orden. En la mecánica clásica aparecen frecuentemente en el estudio de fenómenos ondulatorios, mientras que en la contraparte cuántica descolla, por su importancia en el desarrollo de la física actual, la famosa ecuación de Schrödinger. En un artículo que se ha convertido en un clásico, Infeld y Hull [2] dan un tratamiento extensivo al método de fatorización para dichas ecuaciones, y obtienen una forma general para la solución de problemas de eigenvalores. También existen otras formas de plantear el problema de factorización, y, en particular, nosotros presentaremos aquí el método seguido por Piña [4].

2.1. Factorización de funciones especiales de la física matemática

Una de las formas de factorizar las funciones especiales encontradas en los problemas físicos es la siguiente: consideremos la ecuación general

$$\mathcal{L}_n y_n(x) \equiv 0 \tag{1}$$

en donde el operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L}_n$ es un operador diferencial de segundo orden dado por

$$\mathcal{L}_n = P(x)\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)\frac{d}{dx} + R_n(x) \tag{2}$$

donde P, Q y R_n son funciones de x, y R_n depende del índice n. Supongamos que existen operadores diferenciales de escalera:

$$A_n^+ = \sqrt{P}\frac{d}{dx} + a_n^+ \qquad\qquad A_n^- = \sqrt{P}\frac{d}{dx} + a_n^- \tag{3}$$

de manera que

$$A_n^+ y_n(x) = \alpha_n y_{n+1}(x) \qquad\qquad A_n^- y_n(x) = \beta_n y_{n-1}(x)$$

y que pueden factorizar (2) de la forma

$$A^-_{n+1}A^+_n = \mathcal{L}_n + K_n \tag{4}$$

$$A^+_n A^-_{n+1} = \mathcal{L}_{n+1} + K_n \tag{5}$$

donde $K_n = \alpha_n \beta_n$ es la misma constante para ambas factorizaciones. De hecho, dado que $A^+_n y_n(x) \propto y_{n+1}(x)$ y $A^-_n y_n(x) \propto y_{n-1}(x)$, generalmente estas dos relaciones son las relaciones de recurrencia de las funciones especiales de la física matemática.

Las factorizaciones (4-5) son posibles al menos para los casos de interés físico, y las funciones a^+_n, a^-_{n+1}, resultan ser:

$$a^-_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d}{dx}\sqrt{P} + c_n + \int^x \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n)dx\right] \tag{6}$$

$$a^+_n(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d}{dx}\sqrt{P} - c_n - \int^x \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n)dx\right] \tag{7}$$

en donde c_n es una constante de integración.[2]

2.2. Ejemplos

A continuación veremos algunos ejemplos de factorización de funciones especiales de interés para la física.

2.2.1. Funciones de Bessel

De la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n(x)}{dx} + (1 - \frac{n^2}{x^2})J_n(x) = 0 \tag{8}$$

se identifica de manera inmediata

$$P(x) = 1 \qquad Q(x) = \frac{1}{x} \qquad R_n = (1 - \frac{n^2}{x^2})$$

[2]De hecho, esta es una limitación del método de Piña, el no poder determinar las constantes c_n, α_n y β_n. Sin embargo, todos los resultados aquí mostrados concuerdan con los obtenidos mediante el método de Infeld y Hull [2].

de manera que, sustituyendo en las fórmulas para a_n^+ y a_{n+1}^- se tiene

$$a_{n+1}^- = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} + c_n + \int \left(1 - \frac{(n+1)^2}{x^2} - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\right) dx\right]$$

y

$$a_n^+ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - c_n + \int \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) - \left(1 - \frac{(n+1)^2}{x^2}\right) dx\right]$$

efectuando las operaciones tenemos finalmente que

$$a_n^+ = -\frac{n}{x} \qquad a_{n+1}^- = \frac{n+1}{x}$$

con esto, ahora podemos obtener los operadores (3):

$$A_n^+ = \frac{d}{dx} - \frac{n}{x} \qquad\qquad A_n^- = \frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x}$$

sustituyendo ahora estos valores en las expresiones generales para los operadores de escalera se obtienen los operadores de escalera de ascenso y descenso, respectivamente:

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x}\right) J_n(x) = -J_{n+1}(x) \tag{9}$$

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x}\right) J_{n+1}(x) = J_n(x) \tag{10}$$

que resultan ser las conocidas relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel, como se mencionó anteriormente.

2.2.2. Funciones de Hermite

Para la ecuación de Hermite

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0 \tag{11}$$

se obtienen los operadores de ascenso y descenso:

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n(x) = -H_{n+1} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}H_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x) \tag{13}$$

2.2.3. Funciones de Laguerre

Para las funciones de Laguerre, obtenidas de la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 L_n^\alpha(x)}{dx^2} + [(\alpha+1)x - x^2] \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + nxL_n^\alpha(x) = 0 \tag{14}$$

tenemos los operadores de ascenso

$$\left(x\frac{d}{dx} + \alpha + n + 1 - x \right) L_n^\alpha(x) = (n+1)L_{n+1}^\alpha(x) \tag{15}$$

y de descenso

$$\left(x\frac{d}{dx} - n - 1 \right) L_{n+1}^\alpha(x) = -(\alpha + n + 1)L_n^\alpha(x) \tag{16}$$

2.2.4. Funciones de Legendre

Para la ecuación de Legendre

$$(x^2-1)^2 \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} + 2x(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx} - n(n+1)(x^2-1)P_n(x) = 0 \tag{17}$$

obtenemos los operadores de escalera de ascenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx} + (n+1)x \right] P_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) \tag{18}$$

y descenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx} - (n+1)x \right] P_{n+1}(x) = -(n+1)P_n(x) \tag{19}$$

2.2.5. Funciones asociadas de Legendre

Para la ecuación asociada de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_n^m(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n^m(x)}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) = 0 \tag{20}$$

se tienen los operadores de escalera de ascenso

$$\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx} + \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \right] P_n^m(x) = (m-n)P_n^{m+1}(x) \tag{21}$$

y descenso

$$\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx} - \frac{(1+m)x}{\sqrt{1-x^2}} \right] P_n^{m+1}(x) = (m+n+1)P_n^m(x) \tag{22}$$

2.2.6. Polinomios de Chebyshev

La ecuación de Chebyshev

$$(x^2-1)^2\frac{d^2T_n(x)}{dx^2}+x(x^2-1)\frac{dT_n(x)}{dx}-n^2(x^2-1)T_n(x)=0 \tag{23}$$

cuenta con operadores de ascenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}+nx\right]T_n(x)=nT_{n+1}(x) \tag{24}$$

y descenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}-(n+1)x\right]T_{n+1}(x)=-(n+1)T_n(x) \tag{25}$$

2.2.7. Funciones de Jacobi

Para la ecuación de las funciones de Jacobi

$$x^2(1-x)^2\frac{d^2f_n(x)}{dx}+x(1-x)[\gamma-(\alpha+1)x]\frac{df_n(x)}{dx}+x(1-x)n(n+\alpha)f_n(x)=0 \tag{26}$$

se tienen los operadores de ascenso

$$\left[x(1-x)\frac{d}{dx}-(n+\alpha)\left(x-\frac{n+\gamma}{2n+\alpha+1}\right)\right]f_n(x)=\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}f_{n+1}(x) \tag{27}$$

y descenso

$$\left[x(1-x)\frac{d}{dx}+(n+1)\left(x-\frac{n+1+\alpha-\gamma}{2n+\alpha+1}\right)\right]f_{n+1}(x)=-\frac{(n+1)(n+1+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha+1}f_n(x) \tag{28}$$

2.2.8. Polinomios de Jacobi

Para los polinomios de Jacobi, obtenidos de la ecuación

$$\begin{aligned}(1-x^2)^2\ \frac{d^2P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx^2} \quad &+ \quad (1-x^2)[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}+\\ &+(1-x^2)n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=0\end{aligned} \tag{29}$$

se tienen los operadores de escalera de ascenso

$$\begin{aligned}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\quad + \quad (n+1+\alpha+\beta)\left(-x+\frac{\beta-\alpha}{2n+2+\alpha+\beta}\right)\right]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =\\ =-\frac{2(n+1)(n+1+\alpha+\beta)}{2n+2+\alpha+\beta}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\end{aligned} \tag{30}$$

y descenso

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} \quad + \quad (n+1)(x+\frac{\beta-\alpha}{2n+2+\alpha+\beta})\right] P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) =$$
$$= \frac{2(n+1+\alpha)(n+1+\beta)}{2n+2+\alpha+\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{31}$$

•

Nótese la relativa facilidad con la que se puede trabajar con los operadores de escalera: conociendo la eigenfunción de orden n se puede conocer la de orden $n+1$ con el operador de ascenso, y viceversa: conociendo la función de orden $n+1$, y usando el operador de descenso se puede conocer la eigenfunción de orden n.

2.3. Factorización del oscilador cuántico unidimensional

El oscilador armónico permanece hasta hoy como uno de los pilares del estudio de la mecánica: a lo largo de la historia de la física ha permanecido como la piedra angular para el desarrollo de nuevas y fructíferas teorías, destacando eminentemente la mecánica cuántica, por el amplio espectro de soluciones que ofrece, la elegancia matemática de su teoría y el poder de sus resultados.

El Hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional es un operador diferencial de segundo grado:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 \tag{32}$$

que puede ser fácilmente factorizable en operadores de escalera. Si definimos los operadores

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{\frac{x^2}{2}} \tag{33}$$

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{34}$$

vemos que éstos tienen las siguientes propiedades

$$A^*A = H - \frac{1}{2} \qquad AA^* = H + \frac{1}{2} \qquad [A, A^*] = 1 \tag{35}$$

$$HA^* = A^*(H+1) \qquad HA = A(H-1) \tag{36}$$

Entonces, con la ayuda de estos operadores y una vez conocida la eigenfunción que corresponde al eigenvalor λ, ψ_λ, se pueden obtener eigenvectores que corresponden a los eigenvalores $\lambda+1$ y $\lambda-1$, pues

$$H(A^*\psi_\lambda) = A^*(H+1)\psi_\lambda = (\lambda+1)A^*\psi_\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{\lambda+1} \propto A^*\psi_\lambda \tag{37}$$

$$H(A\psi_\lambda) = A(H-1)\psi_\lambda = (\lambda-1)A\psi_\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{\lambda-1} \propto A\psi_\lambda \tag{38}$$

La eigenfunción que se puede conocer inmediatamente es ψ_0, pues $a\psi_0 = 0$, y entonces

$$\psi_0 \propto e^{-x^2} \tag{39}$$

2.4. Funciones de Mielnik isoespectrales al oscilador armónico

Partiendo de la factorización tradicional, donde a cada término diferencial se le suma un factor proporcional a x, Bogdan Mielnik mostró, en un artículo publicado en 1984 [5], cómo un método con una función general $\beta(x)$ da resultados interesantes, que generan el mismo espectro de energías que la factorización tradicional y que sin embargo tienen una diferente estructura matemática. Mielnik usa un método de factorización del Hamiltoniano de un oscilador armónico en una dimensión para, de esta manera, encontrar una nueva familia de operadores Hamiltonianos.

En lugar de factorizar el Hamiltoniano (32) con los operadores A, A^*, definamos ahora nuevos operadores

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + \beta(x)\right) \qquad B^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + \beta(x)\right) \tag{40}$$

requiriendo que también podamos factorizar el Hamiltoniano (32) como:

$$BB^* = AA^* = H + \frac{1}{2} \tag{41}$$

De aquí obtenemos que

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \beta' + \beta^2\right) \tag{42}$$

de lo cual se obtiene una ecuación de Ricatti para la función $\beta(x)$

$$\beta' + \beta^2 = 1 + x^2 \tag{43}$$

Esta ecuación tiene como solución particular a $\beta(x) = x$. Si escribimos la solución general como:

$$\beta = x + \phi(x) \tag{44}$$

se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para $\phi(x)$

$$\phi' + 2\phi x + \phi^2 = 0 \tag{45}$$

Si ahora hacemos $y = \frac{1}{\phi}$, se obtiene:

$$-y' + 2xy + 1 = 0 \tag{46}$$

con solución general

$$y = \left(\gamma + \int_0^x e^{-u^2} du\right) e^{x^2}, \qquad \gamma \in R \tag{47}$$

de donde:

$$\phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x e^{-u^2} du} \tag{48}$$

Por lo tanto

$$\beta(x) = x + \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x e^{-u^2} du} \tag{49}$$

γ debe ser elegido de manera que $\beta(x)$ sea regular, por lo que la elección

$$|\gamma| > \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{50}$$

permite que se cumpla esa condición.

Hasta aquí la factorización (41), con $\beta(x)$ dado por (49), no introduce nada nuevo. Sin embargo, pese a que A^*A todavía reproduce el Hamiltoniano (32), el producto B^*B no lo hace, sino que introduce un nuevo Hamiltoniano, $\widetilde{H}$, de la siguiente manera:

$$B^*B = H + \frac{1}{2} - 1 - \frac{d\phi}{dx} = \widetilde{H} - \frac{1}{2} \tag{51}$$

es decir,

$$\widetilde{H} = H - \frac{d\phi}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \widetilde{V}(x) \tag{52}$$

donde

$$\widetilde{V}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-x^2}}{\gamma + \int\limits_0^x e^{-u^2}du}\right] \tag{53}$$

Debido a lo anterior, el espectro de $\widetilde{H}$ resulta ser idéntico al del oscilador armónico, pero construido con eigenvectores diferentes, pues

$$\widetilde{H}B^* = (B^*B + \frac{1}{2})B^* = B^*(H+1) \tag{54}$$

de manera que podemos construir las eigenfunciones ϕ_n del Hamiltoniano $\widetilde{H}$ a partir de las eigenfunciones del oscilador armónico, ψ_n,

$$\phi_1 = B^*\psi_0\ , \quad \phi_2 = B^*\psi_1\ , \quad \ldots\ , \quad \phi_n = B^*\psi_{n-1}\ , \quad \ldots \tag{55}$$

que corresponden a los mismos eigenvalores E_n del oscilador armónico:

$$\widetilde{H}\phi_n = \widetilde{H}B^*\psi_{n-1} = B^*(H+1)\psi_{n-1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_n \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{56}$$

Es claro que la ec.(55) no nos puede proporcionar todo el espectro, sino que “falta” un vector, ϕ_0. Este resultado es similar a un resultado típico de la factorización supersimétrica (véase la Sección 3). El vector ϕ_0 puede ser obtenido a partir de:

$$B\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{d}{dx} + \beta(x)\right]\phi_0 = 0 \tag{57}$$

de manera que

$$\phi_0 = c_0 e^{-\frac{x^2}{2}} exp\left(-\int\limits_0^x \phi(u)du\right) \tag{58}$$

ϕ_0 cumple la ecuación de eigenvalores

$$\widetilde{H}\phi_0 = (B^*B + \frac{1}{2})\phi_0 = \frac{1}{2}\phi_0 \tag{59}$$

Nótese que el sistema de vectores $\phi_0, \phi_1, ...$, corresponde a un nuevo Hamiltoniano con un espectro idéntico al del oscilador armónico. Además, a diferencia de las funciones ordinarias del oscilador armónico, ϕ_{n+1} y ϕ_{n-1} no son construidos a partir de ϕ_n por medio de operadores de escalera "ordinarios", sino a través del uso de "operadores de escalera de tercer orden"[5]:

$$O = B^* A B \quad , \qquad O^* = B^* A^* B \tag{60}$$

como el lector puede fácilmente verificar.

Una forma muy utilizada actualmente para ecuaciones como la ec.(49) es la siguiente

$$\beta(x) = x + \frac{d}{dx} \ln \left(\gamma + \int_0^x e^{-u^2} du \right) \tag{61}$$

2.5. Funciones especiales equivalentes, o isoespectrales

Motivados por el resultado de Mielnik, veamos ahora si podemos ir un paso más adelante en la factorización ejemplificada con el trabajo de Piña, motivados por la riqueza matemática a la que puede dar lugar la factorización propuesta por el primero, puesto que el espectro de energías para las funciones modificadas es el mismo que para las originales, pero con un espacio de Hilbert generado ahora por operadores "de tercer orden".

Suponiendo entonces que existe una factorización con operadores diferenciales de primer orden, usamos entonces un método más general de obtención de operadores de escalera para ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo propuesto por Piña y hacemos una extensión para operadores de escalera, entendiendo por esto operadores con una modificación adicional (un término extra) y que siguen el mismo método de obtención. Este trabajo no pretende ser exahustivo: antes bien, existen otros que muestran la posible obtención de operadores de orden $N \geq 2$ para Hamiltonianos unidimensionales [3]. Los resultados aquí obtenidos se aplicarán a algunas de las ecuaciones de la física matemática más conocidas.

Deseamos saber si, dados los operadores de escalera A_n^+, A_n^-, definidos en la ec. (3), existen funciones b_n^+ y b_n^- tales que podamos definir nuevos operadores

$$\begin{aligned} B_n^+ &= A_n^+ + b_n^+ \\ B_n^- &= A_n^- + b_n^- \end{aligned} \tag{62}$$

de manera que se cumpla la igualdad

$$B_{n+1}^{-}B_n^{+} = A_{n+1}^{-}A_n^{+} = \mathcal{L}_n(x) + K_n \tag{63}$$

$$B_{n+1}^{-}B_n^{+}y_n(x) = K_n y_n(x) \tag{64}$$

Debemos notar que la idea subyacente es usar el comportamiento que deben seguir las eigenfunciones ante dos operaciones sucesivas de los operadores de escalera. Siguiendo este método se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{-}B_n^{+} &= K_n + P\frac{d^2}{dx^2} + \sqrt{P}\frac{d\sqrt{P}}{dx}\frac{d}{dx} + \sqrt{P}\left(\frac{da_n^{+}}{dx} + a_n^{+}\frac{d}{dx}\right) + \sqrt{P}\left(\frac{db_n^{+}}{dx} + b_n^{+}\frac{d}{dx}\right) + \\ &\quad + \sqrt{P}a_{n+1}^{-}\frac{d}{dx} + a_n^{+}a_{n+1}^{-} + b_n^{+}a_{n+1}^{-} + \sqrt{P}b_{n+1}^{-}\frac{d}{dx} + a_n^{+}b_{n+1}^{-} + b_n^{+}b_{n+1}^{-} \end{aligned} \tag{65}$$

Podemos ver que el producto $A_{n+1}^{-}A_n^{+}$ está dado por

$$A_{n+1}^{-}A_n^{+} = K_n + P\frac{d^2}{dx^2} + \sqrt{P}\frac{d\sqrt{P}}{dx}\frac{d}{dx} + \sqrt{P}\left(\frac{da_n^{+}}{dx} + a_n^{+}\frac{d}{dx}\right) + \sqrt{P}a_{n+1}^{-}\frac{d}{dx} + a_n^{+}a_{n+1}^{-} \tag{66}$$

de manera que

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{-}B_n^{+} &= P\frac{d^2}{dx^2} + Q\frac{d}{dx} + R_n + K_n + \\ &\quad + \sqrt{P}\left(b_{n+1}^{-} + b_n^{+}\right)\frac{d}{dx} + \sqrt{P}\frac{db_n^{+}}{dx} + a_n^{+}b_{n+1}^{-} + b_n^{+}a_{n+1}^{-} + b_n^{+}b_{n+1}^{-} \end{aligned} \tag{67}$$

La factorización (63) se cumplirá solo si

$$b_{n+1}^{-} = -b_n^{+} \tag{68}$$

y

$$\sqrt{P}\frac{db_n^{+}}{dx} - b_n^{+2} + b_n^{+}(a_{n+1}^{-} - a_n^{+}) = 0 \tag{69}$$

Por lo tanto estas son las dos condiciones que deben cumplir las funciones b_n^{+}, b_{n+1}^{-}, para poder generar nuevos operadores B_n^{+}, B_{n+1}^{-}, que factorizen al operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L}_n(x)$. Obviamente, la solución trivial $b_n^{+} = 0$ conduce a los operadores originales $A_n^{+},\ A_{n+1}^{-}$.

Ahora bien, la ecuación (69) es una ecuación tipo Ricatti, que se puede resolver a través de la sustitución $b_n^+ = 1/y(x)$, con la que obtenemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(a_n^+ - a_{n+1}^-)}{\sqrt{P}} y + \frac{1}{\sqrt{P}} = 0 \tag{70}$$

que se resuelve a través del uso del factor integrante e^δ, donde $\delta(x)$ es la integral indefinida

$$\delta(x) \equiv \int^x \frac{\left(a_n^+(y) - a_{n+1}^-(y)\right)}{\sqrt{P(y)}} dy \tag{71}$$

Tenemos entonces la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(e^\delta y\right) + \frac{e^\delta}{\sqrt{P}} = 0 \tag{72}$$

que se integra fácilmente para encontrar que

$$y = \frac{\gamma - \int_{x_0}^{x} \frac{e^\delta}{\sqrt{P}} dy}{e^\delta} \tag{73}$$

Finalmente, tenemos que

$$b_n^+(x) = \frac{e^{\delta(x)}}{\gamma - \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\delta(y)}}{\sqrt{P(y)}} dy} \tag{74}$$

donde γ es una constante de integración que va acompañada de la elección del punto x_0. Éste a su vez puede ser elegido como el punto donde el integrando se anula,[3] aunque la elección de γ (y por tanto de x_0) está restringida por el hecho de que la función $b_n^+(x)$ debe ser regular en el intervalo de definición de la variable independiente en la ecuación diferencial.

Aquí es importante notar que ***la constante γ, dentro de su rango permitido de valores, representa un parámetro de la factorización (63).***

Una vez conocidas las funciones $P(x), a_n^+$, y a_{n+1}^- podemos en principio conocer la forma de la expresión para b_n^+, y de ésta, la forma de los operadores B_n^+, B_{n+1}^-.

[3]En mecánica cuántica, el valor de x_0 lo determina el rango de validez del problema a tratar; esta elección sería entonces similar a la elección del cero de “potencial” del problema.

De la misma manera que Mielnik introdujo el Hamiltoniano $\widetilde{H}$, introducimos ahora un nuevo operador de Sturm-Liouville $\widetilde{\mathcal{L}}_n(x)$ dado por

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{n+1} = B_n^+ B_{n+1}^- - K_n = \mathcal{L}_{n+1} - 2\sqrt{P}\frac{db_n^+}{dx} \tag{75}$$

Es decir, el nuevo operador de Sturm-Liouville $\widetilde{\mathcal{L}}$ difiere de $\mathcal{L}$ por la derivada de la solución de la ecuación de Riccati (69), de la misma manera que el Hamiltoniano de Mielnik $\widetilde{H}$ difiere del Hamiltoniano original H del oscilador armónico por la derivada de la solución de una ecuación de Riccati, como se muestra en la ecuación (52).

Supongamos ahora que el operador $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ tiene eigenfunciones $\widetilde{\psi}_n$, tal que

$$\widetilde{\mathcal{L}}_n \widetilde{\psi}_n \equiv 0 \tag{76}$$

Podemos ver que si definimos

$$\widetilde{\psi}_{n+1} \equiv B_n^+ \psi_n \tag{77}$$

donde ψ_n son las eigenfunciones de $\mathcal{L}_n$, entonces

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}\widetilde{\psi}_{n+1} = \left(B_n^+ B_{n+1}^- - K_n\right) B_n^+ \psi_n = B_n^+ \mathcal{L}_n \psi_n = 0 \tag{78}$$

lo que conduce a la ecuación de eigenvalores

$$B_n^+ B_{n+1}^- \widetilde{\psi}_{n+1} = \left(\widetilde{\mathcal{L}}_{n+1} + K_n\right) \widetilde{\psi}_{n+1} = K_n \widetilde{\psi}_{n+1} \tag{79}$$

Aquí quisieramos resaltar algunas características de los resultados obtenidos con nuestro método:

- Como se mostró arriba, hemos generado una familia paramétrica de operadores $\widetilde{\mathcal{L}}_n(x;\gamma)$, cuyas eigenfunciones $\widetilde{\psi}_n$ son isoespectrales a las soluciones del operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L}_n$ definido por la ec. (2).

- Debido a que $B_n^+ = A_n^+ + b_n^+$, en general $\widetilde{\psi}_{n+1}$ tiene una parte proporcional a ψ_{n+1}, y otra proporcional a ψ_n, donde el factor de proporcionalidad de la primera es una constante, mientras que el factor de la segunda es la función paramétrica $b_n^+(x;\gamma)$.

- Los operadores B_n^+, B_{n+1}^-, no son operadores de escalera, como lo son A_n^+, A_{n+1}^-, sino que solamente factorizan a los operadores de Sturm-Liouville $\mathcal{L}_n$, $\widetilde{\mathcal{L}}_n$. Sin embargo, vemos que si definimos los operadores C_n^+ y C_{n+1}^- por medio de

$$C_n^+ \equiv B_n^+ A_{n-1}^+ B_n^- \tag{80}$$

$$C_{n+1}^- \equiv B_{n-1}^+ A_n^- B_{n+1}^- \tag{81}$$

entonces

$$C_n^+ \widetilde{\psi}_n = (B_n^+ A_{n-1}^+ B_n^-)\widetilde{\psi}_n = (B_n^+ A_{n-1}^+ B_n^-) B_{n-1}^+ \psi_{n-1} \tag{82}$$

$$= K_{n-1}\alpha_{n-1} B_n^+ \psi_n = K_{n-1}\alpha_{n-1}\widetilde{\psi}_{n+1} = cte.\widetilde{\psi}_{n+1} \tag{83}$$

sí funcionan como operadores de escalera para las nuevas funciones $\widetilde{\psi}_n(x)$.

- Debido a lo anterior, y al hecho de que las funciones b_n^+ en general están definidas para $n \geq 0$, no es posible proponer una ecuación que defina al vector base $\widetilde{\psi}_0$ del nuevo conjunto de funciones especiales, pues tanto el operador C_0^- como B_0^- tendrían índices n negativos, lo cual no es posible por definición.

Este último resultado impide que se pueda 'calcular' al vector $\widetilde{\psi}_0$, como se hace en Mecánica Cuántica [5], pero está en completo acuerdo con Mecánica Cuántica Supersimétrica, en donde el Hamiltoniano del potencial compañero supersimétrico siempre carece del estado base (véase la Secc.3.)

2.6. Ejemplos

A continuación procederemos a obtener los operadores y eigenfunciones isoespectrales para las funciones de la física matemática introducidas en la Sección 2.2 [25].

2.6.1. Funciones de Bessel

Para las funciones de Bessel las ecs.(8-10) dan $P = 1$, $a_n^+ = -n/x$ y $a_{n+1}^- = (n+1)/x$, de manera que la integral δ de la ec.(71) es

$$\delta = \int^x \left(-\frac{n}{y} - \frac{n+1}{y}\right) dy = \ln x^{-(2n+1)}$$

por lo que

$$b_n^+ = \frac{x^{-(2n+1)}}{\gamma' - \int\limits_{\infty}^{x} y^{-(2n+1)}dy} = \frac{2n}{\gamma x^{2n+1} + x} \tag{84}$$

Para $x > 0$, el parámetro γ debe cumplir $\gamma = 2n\gamma' \geq 0$ para evitar divergencias.

La derivada de la función $b_n^+(x;\gamma)$ es

$$\frac{db_n^+}{dx} = \frac{-2n - 2n\gamma(2n+1)x^{2n}}{\left(\gamma x^{2n+1} + x\right)^2} \tag{85}$$

de manera que para el nuevo operador de Sturm-Liouville

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}(x;\gamma) = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + \left(1 - \frac{(n+1)^2}{x^2}\right) + \frac{4n + 4n\gamma(2n+1)x^{2n}}{\left(\gamma x^{2n+1} + x\right)^2} \tag{86}$$

se tienen las eigenfunciones paramétricas

$$\widetilde{J}_{n+1}(x;\gamma) = -J_{n+1}(x) + \frac{2n}{\gamma x^{2n+1} + x} J_n(x) \tag{87}$$

Volviendo a la ec.(84), en el caso $x = 0$, b_n^+ diverge, ocasionando que las funciones $\widetilde{J}_{n+1}(x;\gamma)$ no sean regulares en $x=0$. Sin embargo, es interesante notar que para $\gamma=0$, la ec.(87) lleva a que

$$\widetilde{J}_{n+1}(x;\gamma) = -J_{n+1}(x) + \frac{2n}{x} J_n(x)$$

y usando la siguiente relación de recurrencia

$$J_{n-1} = -J_{n=1} + \frac{2n}{x} J_n$$

tenemos que $\widetilde{J}_{n+1}(x;\gamma) \equiv J_{n-1}(x)$, es decir, que ¡nuestro operador $\widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}(x;\gamma)$ en lugar de aumentar el índice de J_n, lo disminuye!, y las eigenfunciones $\widetilde{J}_{n+1}(x;0)$ resultan ser regulares en $x=0$.

2.6.2. Funciones de Hermite

Para las funciones de Hermite, de las ecs.(11-13) se tiene que

$$\delta = \int^{x} (-2y)dy = -x^2$$

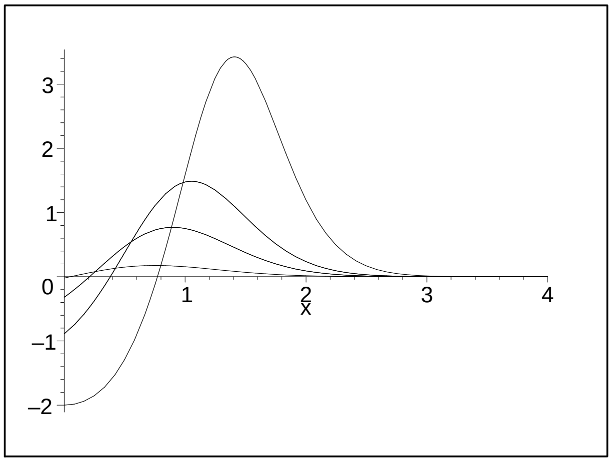

Figura 1: El potencial V_b de la ecuación de Hermite, con los valores paramétricos $\gamma = 1{,}1.5{,}2.5{,}10$, que conforme γ aumenta, disminuyen en intensidad.

y entonces

$$b_n^+ = \frac{e^{-x^2}}{\gamma - \int\limits_0^x e^{-y^2} dy} \tag{88}$$

Por otro lado, si definimos los polinomios de Hermite en el intervalo $0 \leq x < \infty$, y sabiendo que la integral en el numerador es creciente, con valor máximo

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

entonces para $\gamma > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ no existirá singularidad alguna.[4]

Usando ahora la ec. (69) se obtiene

$$\frac{db_n^+}{dx} = \left(\frac{e^{-x^2}}{\gamma - \int\limits_0^x e^{-y^2} dy} \right)^2 - \frac{2xe^{-x^2}}{\gamma - \int\limits_0^x e^{-y^2} dy} \tag{89}$$

[4]Algunos autores definen los polinomios de Hermite en el intervalo $-\infty < x < \infty$, y en ese caso se tendrá el mismo resultado para γ que el obtenido por Mielnik, ec.(50). De hecho, la factorización del oscilador armónico, realizada por Mielnik [5], es la forma autoadjunta de la factorización de los polinomios de Hermite.

de manera que para el nuevo operador de Sturm-Liouville

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}(x;\gamma) = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n + \frac{4xe^{-x^2}}{\gamma - \int\limits_0^x e^{-y^2}dy} - \frac{2e^{-2x^2}}{\left(\gamma - \int\limits_0^x e^{-y^2}dy\right)^2} \tag{90}$$

se obtienen las eigenfunciones paramétricas

$$\widetilde{H}_{n+1}(x;\gamma) = -H_{n+1}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\gamma - \int\limits_0^x e^{-y^2}dy} H_n(x) \tag{91}$$

Si consideramos al término $2n$ como el "potencial"de la ecuación de Hermite, entonces el término

$$V_b(x) \equiv \frac{4xe^{-x^2}}{\gamma - \int\limits_0^x e^{-y^2}dy} - \frac{2e^{-2x^2}}{\left(\gamma - \int\limits_0^x e^{-y^2}dy\right)^2}$$

podría ser considerado el potencial introducido por la factorización inversa (75), y es independiente del parámetro n. Este término de potencial está graficado en la Fig.1.

2.6.3. Funciones de Laguerre

Para la funciones de Laguerre, de las ecs.(14-16) tenemos que

$$\delta = \int^x \frac{\alpha + 2(n+1) - y}{y} dy = \ln x^{[\alpha+2(n+1)]} - x \tag{92}$$

y entonces

$$b_n^+ = \frac{x^{\alpha+2n+2}e^{-x}}{\gamma - \int\limits_0^x y^{(\alpha+2n+1)}e^{-y}dy} \tag{93}$$

En cuanto al denominador, la integral es creciente, con valor máximo

$$\int\limits_0^\infty y^{(\alpha+2n+1)}e^{-y}dy = \Gamma(\alpha + 2n + 2)$$

de manera que, como no existe límite superior para n cada vez mayor, debemos tener $\gamma < 0$ para evitar divergencias.

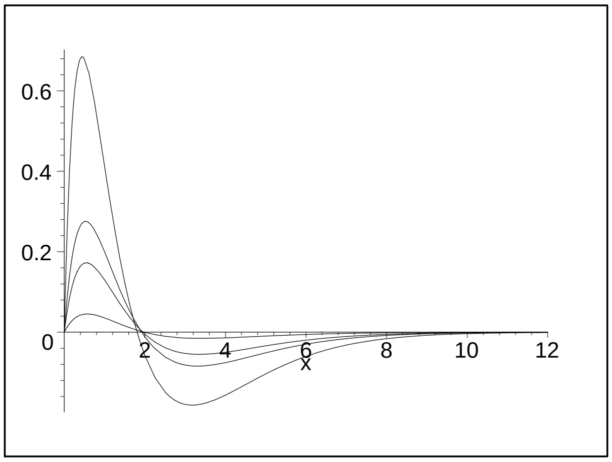

Figura 2: El potencial V_b de la ecuación de Laguerre, para el caso $n = \alpha = 0$, con los valores paramétricos $\gamma = -1, -3, -5, -20$, que conforme γ aumenta, disminuyen en intensidad.

El nuevo operador de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}(x;\gamma) &= x^2\frac{d^2}{dx^2} + [(\alpha+1)x - x^2]\frac{d}{dx} + nx + \frac{2[x-(\alpha+2n+2)]\,x^{\alpha+2n+1}\,e^{-x}}{\gamma - \int\limits_0^x y^{(\alpha+2n+1)}e^{-y}dy} \\ &\quad - \frac{2\,x^{2\alpha+4n+2}\,e^{-2x}}{\left(\gamma - \int\limits_0^x y^{(\alpha+2n+1)}e^{-y}dy\right)^2} \end{aligned} \tag{94}$$

tiene como eigenfunciones paramétricas a

$$\widetilde{L}^{\alpha}_{n+1}(x;\gamma) = (n+1)L^{\alpha}_{n+1} + \frac{x^{\alpha+2n+2}e^{-x}}{\gamma - \int\limits_0^x y^{(\alpha+2n+1)}e^{-y}dy}L^{\alpha}_n \tag{95}$$

En este caso, se tendría una contribución al "potencial" nx, dada por

$$V_b(x;\gamma) \equiv \frac{2[x-(\alpha+2n+2)]\,x^{\alpha+2n+1}\,e^{-x}}{\gamma - \int\limits_0^x y^{(\alpha+2n+1)}e^{-y}dy} - \frac{2\,x^{2\alpha+4n+2}\,e^{-2x}}{\left(\gamma - \int\limits_0^x y^{(\alpha+2n+1)}e^{-y}dy\right)^2}$$

que se encuentra graficado en la Fig.2 para $\gamma = -1, -3, -5, -20$.

2.6.4. Funciones de Legendre

Para las funciones de Legendre, de a_n^+, a_{n+1}^-, y P tomados de las ecs.(17-19),

$$\delta = -2(n+1)\int^x \frac{y}{1-y^2}dy = \ln(1-x^2)^{n+1} \tag{96}$$

y de aquí que

$$b_n^+ = \frac{(1-x^2)^{n+1}}{\gamma - \int_{-1}^x (1-y^2)^n dy} \tag{97}$$

Como la ecuación de Legendre se obtiene de manera estándar de la parte angular del laplaciano, x es $x=\cos\theta$, de manera que $-1 \leq x \leq 1$. Para x en este rango la integral de la ec.(97) es creciente, con valor máximo

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

que tiene valores entre 0 y 2. Por tanto, eligiendo $|\gamma| > 2$ evitamos divergencias.

En este caso, el nuevo operador de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}(x;\gamma) &= (1-x^2)^2\frac{d^2}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{d}{dx} + n(n+1)(1-x^2) + \frac{4(n+1)(1-x^2)^{n+1}}{\gamma - \int_{-1}^x (1-y^2)^n dy} \\ &\quad - \frac{2(1-x^2)^{2n+2}}{\left(\gamma - \int_{-1}^x (1-y^2)^n dy\right)^2}\end{aligned} \tag{98}$$

tiene como eigenfunciones paramétricas a

$$\widetilde{P}_{n+1}(x;\gamma) = -(n+1)P_{n+1}(x) + \frac{(1-x^2)^{n+1}}{\gamma - \int_{-1}^x (1-y^2)^n dy}P_n(x) \tag{99}$$

2.6.5. Polinomios de Chebyshev

Para los polinomios de Chebyshev

$$\delta = -(2n+1)\int^x \frac{y}{1-y^2}dy = \frac{2n+1}{2}\ln(1-x^2) \tag{100}$$

y así

$$b_n^+ = \frac{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\gamma - \int\limits_{-1}^{x} (1-y^2)^{n-\frac{1}{2}} dy} \tag{101}$$

La integral en el denominador tiene el valor máximo

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^{(n-\frac{1}{2})} dx = 2 \int\limits_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} \theta d\theta = \frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

la cual impone la condición $\gamma > \pi$.

Ahora podemos construir el operador diferencial de segundo orden

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}(x;\gamma) &= (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x(1-x^2)\frac{d}{dx} + n^2(1-x^2) + \\ &+ \frac{2(2n+1)x(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\gamma - \int\limits_{-1}^{x} (1-y^2)^{n-\frac{1}{2}} dy} - \frac{2(1-x^2)^{2n+1}}{\left(\gamma - \int\limits_{-1}^{x} (1-y^2)^{n-\frac{1}{2}} dy\right)^2} \end{aligned} \tag{102}$$

con eigenfunciones paramétricas

$$\widetilde{T}_{n+1}(x;\gamma) = -nT_{n+1}(x) + \frac{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\gamma - \int\limits_{-1}^{x} (1-y^2)^{n-\frac{1}{2}} dy} T_n(x) \tag{103}$$

2.6.6. Funciones de Jacobi

Para las funciones de Jacobi, de las ecs.(26-28), se obtiene que

$$\delta = \int^{x} \frac{u - vy}{y(1-y)} dy = u \ln x + (v-u)\ln(1-x)$$

en donde

$$u = \frac{(n+\alpha)(n+\lambda) + (n+1)(n+1+\alpha-\lambda)}{2n+\alpha+1} \qquad \text{y} \qquad v = 2n+\alpha+1$$

De aquí que

$$b_n^+ = \frac{x^u(1-x)^{v-u}}{\gamma - \int^{x} y^{u-1}(1-y)^{v-u-1} dy}\,, \tag{104}$$

La integral en el denominador puede ser escrita en términos de la función Beta incompleta, $B_x(u, v-u)$. En el caso particular $v > u$, el rango de valores del parámetro γ que permite una $b_n^+(x)$ regular para todo x se obtiene de la siguiente integral

$$\int_{-1}^{1} x^{u-1}(1-x)^{v-u-1}dx = -\int_{0}^{-1} x^{u-1}(1-x)^{v-u-1}dx + \int_{0}^{1} x^{u-1}(1-x)^{v-u-1}dx <$$

$$< 2\int_{0}^{1} x^{u-1}(1-x)^{v-u-1}dx = 2B(u, v-u) = \frac{2\Gamma(v-u)\Gamma(u)}{\Gamma(v)} \tag{105}$$

por lo que es necesario demandar que $|\gamma| > \frac{2\Gamma(v-u)\Gamma(u)}{\Gamma(v)}$.

El nuevo operador diferencial de segundo orden

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}(x;\gamma) &= x^2(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + x(1-x)\left(\lambda-(\alpha+1)x\right)\frac{d}{dx} + x(1-x)n(n+\alpha) + \\ &+ \frac{2(vx-u)x^u(1-x)^{v-u}}{\gamma - \int_{-1}^{x} y^{u-1}(1-y)^{v-u-1}dy} - \frac{2x^{2u}(1-x)^{2(v-u)}}{\left(\gamma - \int_{-1}^{x} y^{u-1}(1-y)^{v-u-1}dy\right)^2} \end{aligned} \tag{106}$$

tiene como eigenfunciones paramétricas a

$$\widetilde{f}_{n+1}(x;\gamma) = \frac{(n+\alpha)(n+\lambda)}{2n+\alpha+1} f_{n+1}(x) + \frac{x^u(1-x)^{v-u}}{\gamma - \int_{-1}^{x} y^{u-1}(1-y)^{v-u-1}dy} f_n(x)\ . \tag{107}$$

2.6.7. Polinomios de Jacobi

Para los polinomios de Jacobi, de las ecs.(29-31) tenemos que

$$\delta = \int^{x} \frac{p-qy}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}(q+p)\ln(1+x) + \frac{1}{2}(q-p)\ln[(1-x)$$

en donde

$$p = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2n+2+\alpha+\beta} \qquad \text{y} \qquad q = 2n+2+\alpha+\beta$$

con lo que obtenemos entonces que

$$b_n^+ = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}(q+p)}(1-x)^{\frac{1}{2}(q-p)}}{\gamma - \int_{-1}^{x}(1+y)^{\frac{1}{2}(q+p)-1}(1-y)^{\frac{1}{2}(q-p)-1}dy} \tag{108}$$

Para el parámetro γ, como $q > p$, requerimos que

$$\gamma > \int_{-1}^{1}(1+y)^{\frac{1}{2}(q+p)-1}(1-y)^{\frac{1}{2}(q-p)-1}dy = 2^{q-1}\frac{\Gamma(\frac{q+p}{2})\Gamma(\frac{q-p}{2})}{\Gamma(q)}$$

Finalmente, el operador diferencial de segundo orden

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}_{n+1}(x;\gamma) &= (1-x^2)^2\frac{d^2}{dx^2}+(1-x^2)[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}+ \\
&+(1-x^2)n(n+\alpha+\beta+1)+\frac{2(qx-p)(1+x)^{\frac{1}{2}(q+p)}(1-x)^{\frac{1}{2}(q-p)}}{\gamma-\int\limits_{-1}^{x}(1+y)^{\frac{1}{2}(q+p)-1}(1-y)^{\frac{1}{2}(q-p)-1}dy}- \\
&-\frac{2(1+x)^{q+p}(1-x)^{q-p}}{\left(\gamma-\int\limits_{-1}^{x}(1+y)^{\frac{1}{2}(q+p)-1}(1-y)^{\frac{1}{2}(q-p)-1}dy\right)^2}
\end{aligned} \tag{109}$$

tiene eigenfunciones paramétricas

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}^{\alpha\beta}_{n+1}(x;\gamma) &= \frac{2(n+1)(n+1+\alpha+\beta)}{2n+2+\alpha+\beta}P^{\alpha\beta}_{n+1}(x)+ \\
&+\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}(q+p)}(1-x)^{\frac{1}{2}(q-p)}}{\gamma-\int\limits_{-1}^{x}(1+y)^{\frac{1}{2}(q+p)-1}(1-y)^{\frac{1}{2}(q-p)-1}dy}P^{\alpha\beta}_{n}(x)
\end{aligned} \tag{110}$$

2.6.8. Funciones asociadas de Legendre

Para las funciones asociadas de Legendre

$$\delta=(2m+1)\int^{x}\frac{y}{(1-y^2)}dy=-\frac{2m+1}{2}\ln(1-x^2)=\ln(1-x^2)^{-(m+1/2)} \tag{111}$$

con lo que

$$b^{+}_{n}=\frac{(1-x^2)^{m+\frac{1}{2}}}{\gamma-\int\limits_{-1}^{x}(1-y^2)^{-(m+1/2)}dy} \tag{112}$$

quedando una integral que diverge en los límites del intervalo de definición de la variable independiente, $x=\pm1$. De aquí, vemos que este caso no puede ser tratado de la misma manera que los anteriores. Sin embargo, uno puede convencerse fácilmente de que las funciones asociadas de Legendre pueden ser estudiadas a partir de factorizar el operador de Sturm-Liouville (2) por medio de

$$\mathcal{L}_{n+1}=B^{+}_{n}B^{-}_{n+1}$$

en vez de factorizarlo como en (63).

3. Factorización supersimétrica

El método de factorización en la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY) sigue el mismo método que la factorización ordinaria. La idea central detrás de la supersimetría es elaborar un esquema que permita la unificación del espacio y el tiempo y simetrías de la matriz S. Permite además reunir en un mismo esquema a particulas de diferente espín, i.e., bosones y fermiones que poseen diferentes propiedades espacio-temporales.

3.1. Método de Witten de factorización supersimétrica

Existe una gran cantidad de material escrito referente al método de Witten para la factorización en SUSY. Esta no fué sino una extensión de los métodos ya conocidos de factorización, pero que mostró una manera nueva y poderosa de descubrir simetrías ocultas. A lo largo de esta sección nos apoyaremos en un artículo de Lahiri *et. al.* [6].

Para poder comprender cómo la supersimetria yace en la mecánica cuántica no relativista, partamos del Hamiltoniano unidimensional más conocido, del oscilador armónico (bosónico), que puede ser escrito en términos de coordenadas generalizadas q y p:

$$H_B = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega_B q^2 \tag{113}$$

que puede ser reexpresado como:

$$H_B = \frac{\omega_B}{2}\{b^+, b\} \tag{114}$$

donde b y b^+ son los operadores de escalera

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\omega_B}}(p - i\omega_B q) \tag{115}$$

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega_B}}(p + i\omega_B q) \tag{116}$$

que poseen las siguientes propiedades:

$$[b, b^+] = 1\ , \qquad [b, b] = [b^+, b^+] = 0 \tag{117}$$

H_B tiene el bien conocido espectro

$$E_B = \omega_B \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{118}$$

Si ahora definimos de manera análoga a los operadores a y a^+ con las siguientes reglas

$$\{a, a^+\} = 1 \ , \qquad \{a, a^+\} = \{a^+, a^+\} = 0 \tag{119}$$

y definimos un nuevo Hamiltoniano (fermiónico) con estos operadores como

$$H_F = \frac{\omega_F}{2}[a^+, a] \tag{120}$$

éste tendrá el espectro

$$E_F = \omega_F(n_F - \frac{1}{2}) \tag{121}$$

La energía total de un sistema compuesto por la suma de osciladores bosónicos y fermiónicos será entonces

$$E = E_B + E_F = \omega_B n_B + \omega_F n_F + \frac{1}{2}(\omega_B - \omega_F) \tag{122}$$

Existe aquí un punto notable: esta energía total es invariante ante el proceso simultáneo de la destrucción de un bosón cuántico y la creación de un fermión cuántico, y este proceso es simétrico cuando $\omega_F = \omega_B$. Es aquí donde se define a esta simetría como SUSY. Ante la identidad que acabamos de mencionar, se obtiene el "nuevo"espectro de energía

$$E = \omega(n_B + n_F) \tag{123}$$

Debido a ésto, el espectro es doblemente degenerado, a excepción del estado base, correspondiente a $n_B = n_F = 0$. En este caso, cuando el estado base no es degenerado, se dice que el sistema posee buena SUSY, y en el caso de que el estado base sea degenerado, i.e. $E_0 > 0$, se dice que la supersimetría está rota.

Definamos ahora nuevos operadores que realicen la creación (destrucción) de un número cuántico fermiónico y la destrucción (creación) simultánea de un número bosónico; como se puede ver, necesariamente deben poseer una estructura que involucre a los operadores ba^+ y b^+a. Estos operadores son:

$$Q = \sqrt{2\omega}\, ba^+ \qquad Q^+ = \sqrt{2\omega}\, b^+a \tag{124}$$

Nótese que cuando Q (Q^+) opera sobre un estado bosónico (fermiónico), lo convierte en un estado fermiónico (bosónico):

$$Q|B>=|F> \qquad Q^+|F>=|B> \tag{125}$$

Si ahora expresamos el Hamiltoniano SUSY como

$$H_S = H_B + H_F = \omega(a^+a + b^+b) \tag{126}$$

entonces podemos reescribirlo, en términos de Q y Q^+, como:

$$H_S = \frac{1}{2}\{Q^+, Q\} \tag{127}$$

Q y Q^+ son llamadas *super*cargas, pues conmutan con el Hamiltoniano SUSY y obedecen las relaciones:

$$\{Q,Q\} = \{Q^+,Q^+\} = 0 \ , \qquad [Q,H_S] = [Q^+,H_S] = 0 \tag{128}$$

Si definimos ahora de tal modo que se satisfaga (119)[5]

$$a = \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad a^+ = \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_3 = [\sigma_+, \sigma_-] \tag{129}$$

podemos reescribir el Hamiltoniano supersimétrico como:

$$H_S = \frac{\omega}{2}\{b^+, b\}I + \frac{\omega}{2}\sigma_3 \tag{130}$$

donde I es la matriz identidad. Esta forma del Hamiltoniano supersimétrico conduce al Lagrangeano supersimétrico [7]

$$L_S = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + i\overline{\psi}\dot{\psi} - \omega\overline{\psi}\psi \tag{131}$$

donde ψ y $\overline{\psi}$ son simplemente variables fermiónicas (y no operadores) que satisfacen $\psi\psi = \overline{\psi}\overline{\psi} = 0$, $\psi\overline{\psi} = -\overline{\psi}\psi$ y $\overline{\psi} = \psi^+$.

De acuerdo a su artículo de 1981 [8], Witten indica cómo se puede generalizar este esquema –y he aqui la liga con la factorización– para incluir una clase mas amplia de

[5]Existen otras representaciones diferenciales que satisfacen (119), vease [26]

potenciales. Reemplacemos la coordenada q por una función $W(x)$. Dado que ahora el Hamiltoniano tiene la forma

$$H_S = \frac{1}{2}(p^2 + W^2) + \frac{\sigma_3}{2}W' \tag{132}$$

en donde $W' = dW/dx$, se definen las supercargas como:

$$Q = (p - iW)\sigma_+, \qquad Q^+ = (p + iW)\sigma_- \tag{133}$$

que cumple con la regla

$$2H_S = \{Q^+, Q\} \tag{134}$$

Introduciendo ahora los operadores

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(x) + \frac{d}{dx}\right) \ , \qquad D^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(x) - \frac{d}{dx}\right) \tag{135}$$

podemos expresar el Hamiltoniano supersimétrico como:

$$H_S = \frac{1}{2}\{D, D^+\} + \frac{1}{2}\sigma_3\,[D, D^+] = \begin{pmatrix} DD^+ & 0 \\ 0 & D^+D \end{pmatrix} \tag{136}$$

Nótese la gran similaridad de D y D^+ con los operadores de escalera de la sección 1.1. Veamos ahora la relacion que existe entre éstos y el Hamiltoniano supersimétrico.

Supongamos que el espectro de energías para el Hamiltoniano de Schrödinger H es

$$H|n >= \epsilon_n|n > \tag{137}$$

De manera general podemos afirmar que para los operadores de escalera R y R^+ definidos por

$$R = \sum_n C^*_{n-1}|n-1><n|\,, \qquad R^+ = \sum_n C_n|n+1><n| \tag{138}$$

se cumplen las relaciones

$$RR^+|k >= |C_k|^2|k >\,, \qquad R^+R|k >= |C_{k-1}|^2|k > \tag{139}$$

entonces podemos ver que H y los operadores RR^+ y R^+R tienen los mismos eigenkets, por lo que podemos expresar a H como combinación lineal de dichos operadores. La forma más sencilla para esta combinación lineal es:

$$H = a_0 + a_1 R^+ R + a_2 R R^+ \tag{140}$$

Escogiendo $R = D$, $R^+ = D^+$, $a_0 = \epsilon_0 I, a_1 = \sigma_+\sigma_-$ y $a_2 = \sigma_-\sigma_+$, donde I es la matriz indentidad, obtenemos exactamente la forma supersimétrica en (136).

De esta forma, el potencial asociado con el Hamiltoniano supersimétrico puede ser escrito de la forma:

$$V(x) = \frac{1}{2}(W^2 - W') + c \tag{141}$$

donde c es una constante de integración a ser ajustada en función del estado base del sistema.

Tendremos entonces dos soluciones para el potencial, dados por:

$$V_\pm(x) = \frac{1}{2}(W^2 \mp W') \tag{142}$$

Comúnmente, a la función $W(x)$ se le denomina el superpotencial correspondiente al Hamiltoniano supersimétrico.

Notamos entonces que usando los operadores de escalera al realizar la factorización podemos obtener una función de potencial más general que posee supersimetría, en el sentido antes definido.

3.2. Variante supersimétrica de WKB

En esta sección mostraremos el enfoque de la factorización supersimétrica en un método *a la* WKB para encontrar el espectro de energías de un potencial dado [9].

Comenzaremos reescribiendo el Lagrangeano supersimétrico (131) como

$$L = \frac{1}{4}(\frac{dx}{dt})^2 - \phi^2(x) + \frac{1}{2}i[\overline{\psi}\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\overline{\psi}}{dt}\psi] - \phi'[\overline{\psi}, \psi] \tag{143}$$

donde ϕ es una función de x, y $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$.

A partir de este Lagrangeano podemos obtener un par de Hamiltonianos supersimétricos efectivos para la variable (bosónica) $x(t)$ que pueden escribirse como

$$H_{\pm} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \phi^2(x) \pm \hbar\phi'(x) \tag{144}$$

de manera que el potencial correspondiente es

$$V_{\pm}(x) = \phi^2 \pm \hbar\phi'(x) \tag{145}$$

Este potencial posee la recurrente estructura de una ecuación de Ricatti [5].

Es posible, al menos en principio, escribir cualquier problema unidimensional de la forma (144), o al menos siempre que se conozca la energía del estado base E_0 [9].

Consideremos el Hamiltoniano $\widetilde{H}$ es de la forma

$$\widetilde{H} = p^2 + \widetilde{V}(x) \tag{146}$$

donde $\widetilde{E}_0$ y $\widetilde{\psi}_0$ son la energía y la función de onda del estado base de $\widetilde{H}$, respectivamente. Consideremos

$$H \equiv \widetilde{H} - \epsilon_0 \tag{147}$$

En principio, ϵ_0 puede ser cualquier cantidad, pero si se elige $\epsilon_0 = \widetilde{E}_0$,[6] entonces el estado base de H es cero, así que tenemos una SUSY no rota. H puede ser cualquiera de $H_{\pm}$, pero la convención usual es $H = H_{-}$, y entonces puede ser escrito de esta forma:

$$H = H_{-} = p^2 + \phi^2 - \hbar\phi' \tag{148}$$

en donde

$$\phi(x) = \hbar \frac{d\widetilde{\psi}_0(x)}{dx} \left[\widetilde{\psi}_0(x)\right]^{-1} \tag{149}$$

está unívocamente determinada por la eigenfunción base. También, es bien sabido que, de manera general, el espectro de H_+ es idéntico al de H_-, excepto por el estado de energía E_0 [8, 10, 11].

[6] Al respecto, véase la sección 3.3.

Una variante supersimétrica de WKB puede entonces ser obtenida de la siguiente manera: deseamos calcular de forma "semi-clásica"el espectro de un pozo de potencial $V(x)$. Sea $\psi(x)$ la función de onda de H que corresponde al estado ligado de energía E, tal que existen dos puntos de retorno, a y b.

De manera formal,[7] el término dominante en $\hbar$ en la ec.(148) es $p^2 + \phi^2$, así que la región clásicamente prohibida sería la definida por $E < \phi^2(x)$. Si escribimos

$$\psi(x) = A(x)e^{-S/\hbar} \tag{150}$$

y hacemos una expansión en términos de $\hbar$ de la ecuación de Schrödinger (148), y requerimos posteriormente que los términos de $\hbar^0$ y $\hbar^1$ se eliminen en esa ecuación, obtenemos que

$$S(x) = \pm \int^{x} [\phi^2(y) - E]^{\frac{1}{2}} dy \tag{151}$$

$$A(x) = \left[\phi^2(x) - E\right]^{-\frac{1}{4}} \left\{|\phi(x)| + \left[\phi^2(x) - E\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{152}$$

en las regiones clásicamente prohibidas.

Para las regiones donde $E > \phi^2(x)$, utilizando la forma usual $\psi(x) = A(x)\exp(iS/\hbar)$, se obtiene que

$$S(x) = \pm \int^{x} [E - \phi^2(y)]^{\frac{1}{2}} dy \tag{153}$$

$$A(x) = [\phi^2(y) - E]^{-\frac{1}{4}} \exp\{(i/2)\arcsin[\phi(x)/\sqrt{E}]\} \tag{154}$$

Los puntos de retorno, a y b, estarían definidos por

$$\phi^2(a) = E = \phi^2(b) \tag{155}$$

lo que lleva a la condición de cuantización

$$\int_a^b [E - \phi^2(y)]^{\frac{1}{2}} dy = n\pi\hbar \tag{156}$$

Esta ecuación, la cual es el equivalente supersimétrico de WKB, ¡permite obtener de manera **exacta** los espectros de energía para algunos potenciales para los cuales WKB no funciona exactamente! [9].

[7] Si utilizamos la ec.(149) para definir ϕ, entonces $\hbar$ contribuiría también, por lo que nos referimos únicamente a la ec.(148).

3.2.1. Ejemplo de SUSY-WKB

Usando (156) trataremos de determinar el espectro de un pozo cuadrado de potencial,[8] definido de manera estándar por:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{para } -a < x < a \\ 0 & \text{para } x < -a \text{ y } x > a \end{cases}$$

($V_0 > 0$.) Para este sencillo ejemplo, la ec.(145) establece que $\phi(x) \equiv 0$ dentro del pozo de potencial. Además, en este caso los puntos de retorno son a y $-a$. Entonces,

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{E}dx = \sqrt{E}2a = n\pi\hbar$$

de manera que, simplemente,

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{4a^2}$$

es el conocido espectro de este pozo.

3.3. Nota sobre la elección de ϵ_0

Hasta ahora hemos mostrado como utilizar el método de factorización en mecánica clásica y mecánica cuántica, haciendo hincapié en que no siempre es posible realizar toda el álgebra que hemos mostrado, o que a veces las ecuaciones involucradas terminan siendo resueltas solo hasta términos de cuadraturas (véase la secc. 2.6.)

Dentro del tratamiento considerado, supusimos que las ecuaciones diferenciales de segundo orden eran factorizables dentro del esquema propuesto. El Hamiltoniano "normal"(el que aparece en el sistema cuántico no supersimétrico) entonces es el de la ec.(146), con eigenfunciones $\widetilde{\psi}(x)$, y el potencial asociado es $\widetilde{V}(x)$. El Hamiltoniano supersimétrico asociado es H_-, que tiene el mismo conjunto de eigenfunciones, con potencial V_-, y ϕ puede ser considerado el superpotencial asociado. La función de onda del estado base "normal"está relacionada con el superpotencial por la ec.(149); equivalentemente, el superpotencial puede ser encontrado a partir de la función base por la sustitución $\epsilon_0 = \widetilde{E}_0$

[8]Otros ejemplos están desarrollados en [9].

en (147), de manera que

$$\left(\frac{d}{dx}-\phi\right)\widetilde{\psi}_0=0 \tag{157}$$

que lleva a (149).

En la Secc.3.1. se propusieron dos Hamiltonianos, uno bosónico y otro fermiónico, que fueron explícitamente introducidos por el superpotencial (W en esa sección). De manera similar, uno puede tomar el potencial "normal"de un problema físico, y emplear el método de Mielnik —Secc.2.4.— para introducir el compañero supersimétrico después de resolver la ecuación de Riccati (43). En ese caso, la solución (particular) que conduce al potencial "normal"se denomina ϕ_p, y la solución "general"*a la* Mielnik conduce al compañero supersimétrico. Para este último, todavía se tiene una ecuación del tipo (157) —véase (57)—, pero evaluada para la $\phi(x)$ general. Veamos ésto explícitamente.

Las ecuaciones (147-148) pueden escribirse como

$$\phi^2+\phi'=\widetilde{V}(x)-\widetilde{E}_0 \tag{158}$$

con ϕ_p dado por (157).

Ahora bien, como $\phi_g=\phi_p+\phi_2$ es la forma más general del potencial supersimétrico ($\phi_2=1/y$ en (45)), resolviendo la ecuación de Riccati (158) podemos fácilmente llegar a que

$$\phi_2=\frac{e^{-2\int dx\phi_p}}{\int e^{-2\int dx\phi_p}dx+\lambda}=\frac{d}{dx}\ln\left(\int \exp^{-2\int dx\phi_p}dx+\lambda\right) \tag{159}$$

Considerando la ec.(149), esta ecuación puede ser escrita como

$$\phi_2=\frac{\widetilde{\psi}_0^{-2}}{\int \widetilde{\psi}_0^{-2}dx+\lambda} \tag{160}$$

Ahora, si suponemos que el estado ψ_0 base del Hamiltoniano supersimétrico H_+ está relacionado con ϕ_g por medio de una ecuación del tipo (157), entonces tendremos que

$$\phi_g=\frac{d}{dx}\ln\psi_0 \qquad \rightarrow \qquad \psi_0=e^{\int \phi_g dx} \tag{161}$$

entonces

$$\psi_0=\widetilde{\psi}_0\exp^{\int dx\phi_2}=\widetilde{\psi}_0\left(\int \exp^{-2\int dx\phi_p}dx+\lambda\right)=\widetilde{\psi}_0\left(\int\frac{dx}{\widetilde{\psi}_0^2}+\lambda\right) \tag{162}$$

que, como es bien sabido de la teoría de ecuaciones diferenciales de segundo orden [12], no es sino la segunda solución a esa ecuación diferencial, una vez conocida la primera solución $\widetilde{\psi}_0$. ¡Pero esta segunda solución es precisamente la que se descarta en el problema porque no es cuadráticamente integrable!

Sin embargo, aún es posible utilizar esta segunda solución en los casos cosmológicos, donde este problema de normalización es dispensable [13].

4. El método de factorización en la cosmología

Como un ejemplo de la aplicación del método de factorización en la cosmología, aplicaremos el método a las soluciones de cosmologías barotrópicas FRW.

Las cosmologías barotrópicas FRW obedecen al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales [14]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{163}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\kappa}{a^2} \tag{164}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho \tag{165}$$

donde a es el factor de escala del universo, y el punto indica derivación con respecto al tiempo. ρ y p, son la densidad de energía y la presión, respectivamente, del fluido perfecto del cual se asume que está constituido un universo clásico. $\kappa = 0, \pm 1$ es el índice de curvatura del universo plano, cerrado y abierto, respectivamente, y γ es el índice adiabático constante del fluido cosmológico. Recientemente, Faraoni [15] introdujo el método para resolver el sistema de ecuaciones (163-165) usando la ecuación de Riccati, y Rosu utilizó la aproximación de Faraoni para introducir una clase supersimétrica de fluidos cosmológicos que poseen índices adiabáticos dependientes del tiempo [16]. En esos trabajos se propone que esos fluidos pueden dar una explicación simple para un universo que actualmente se acelera [17].

Las soluciones estándar de la teoría, para los propósitos del presente trabajo, son obtenidos al asumir una ecuación de estado para el material del universo de la forma:

$$p = (\gamma - 1)\rho, \qquad \gamma = \text{constante} \tag{166}$$

que reproduce épocas importantes en la historia del universo, como es para la época dominada por "polvo"($\gamma = 1$), la época dominada por radiación ($\gamma = \frac{4}{3}$) y la época de inflación ($\gamma = 0$).

Por otro lado, ya que usamos la métrica FLRW (Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker), dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{167}$$

tendremos diferentes topologías de acuerdo al índice de curvatura κ. Puede verse también que dentro del elemento de línea existen dos funciones importantes a determinar, una vez conocido el índice de curvatura: $a(t)$ y $f(r)$.

Se asumen normalmente los siguientes valores para $f(r)$:

$$f(r) = \sinh r \tag{168}$$

para el universo abierto ($\kappa=-1$),

$$f(r) = r \tag{169}$$

para el universo crítico ($\kappa=0$), y

$$f(r) = \sin r \tag{170}$$

para el universo cerrado ($\kappa=+1$). Existen, por supuesto, otras topologías para diferentes valores de κ (véase, por ejemplo, Ref.[18], pag. 725.)

Para un universo espacialmente plano ($\kappa = 0$), la integración de las ecuaciones (163) y (164) es muy sencilla de hacer y nos lleva a los resultados:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 t^{\frac{2}{3}\gamma} \ , \qquad (\gamma \neq 0) \\ a(t) &= a_0 e^{Ht} \ , \qquad \dot{H} = 0 \quad (\gamma = 0) \end{aligned} \tag{171}$$

En su artículo, Faraoni [15] obtiene una solución, por demás notable, para cualquier valor de γ, que reduce las ecuaciones Einstein-Friedmann a una ecuación de Ricatti, como se explica a continuación.

Considerando las ecuaciones de estado (163-165) se obtiene:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + c\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c\kappa}{a^2} = 0 \tag{172}$$

en donde $c = \frac{3}{2}\gamma - 1$. Si tenemos ahora $\kappa = 0$ fácilmente obtenemos (171). Con $\kappa = \pm 1$ podemos reescribir la ecuación (172) como

$$\frac{a''}{a} + (c-1)\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + c\kappa = 0 \tag{173}$$

habiendo hecho uso del tiempo conforme η, mediante la transformación $dt = a(\eta)d\eta$, y donde una variable primada indica derivación con respecto a η. Haciendo ahora el cambio de variable

$$u \equiv \frac{a'}{a} \tag{174}$$

podemos reescribir la ecuación (173) como

$$u' + cu^2 + \kappa c = 0 \tag{175}$$

que es una ecuación de Ricatti para la variable $u(\eta)$. Si ahora redefinimos

$$u \equiv \frac{1}{c}\frac{w_\kappa'}{w_\kappa} \tag{176}$$

la ecuacion (175) nos queda como

$$w_\kappa'' + \kappa c^2 w_\kappa = 0 \tag{177}$$

cuyas soluciones nos dan directamente el factor de escala $a \propto w_\kappa^{1/c}$. Esta ecuación es fácilmente soluble. Para $\kappa = +1$, la solución a la ec. (177) es $w_1 = W_1 cos(c\eta + d)$, donde d es una fase arbitraria, implicando que

$$a_1(\eta) = A_1[cos(c\eta + d)]^{1/c} \tag{178}$$

$$t(\eta) = A_1 \int_0^\eta d\eta'[cos(c\eta' + d)]^{1/c} \tag{179}$$

mientras que para $\kappa = -1$ la solución es $w_{-1} = W_{-1}\sinh(c\eta)$, y, por lo tanto,

$$a_{-1}(\eta) = A_{-1}\sinh^{1/c}(c\eta) \tag{180}$$

$$t(\eta) = A_{-1}\int_0^\eta d\eta' \sinh^{1/c}(c\eta') \tag{181}$$

donde $W_{\pm1}$, $A_{\pm1}$, son parámetros de amplitud.

A continuación revisamos los métodos de factorización supersimétricos para cosmologias barotrópicas FRW.

4.1. Método supersimétrico aplicado a cosmologías barotrópicas FRW

Como ahora sabemos, las soluciones a la ecuación de Ricatti (175), relacionadas con las soluciones (178,180) de la ec.(173) por medio de la ec.(174), son solamente las soluciones particulares, i.e.

$$u_{p,+1} = -\tan c\eta \qquad \kappa = +1$$
$$u_{p,-1} = \coth c\eta \qquad \kappa = -1.$$

Estas soluciones están íntimamente relacionadas a las factorizaciones comunes de la ecuación de Schrödinger. De hecho, podemos proponer una factorización para la ec.(175) de la siguiente manera:

$$\left(\frac{d}{d\eta} + cu_p\right)\left(\frac{d}{d\eta} - cu_p\right) w = w'' - c(u_p' + cu_p{}^2)w = 0 \tag{182}$$

En la jerga de SUSY, esta ecuación sería llamada la "ecuación bosónica"del modelo, con potencial $V_b = -c^2\kappa$. La ecuación compañera supersimétrica de la ec. (182) sería

$$\left(\frac{d}{d\eta} - cu_p\right)\left(\frac{d}{d\eta} + cu_p\right) w_f = w_f'' - c(-u_p' + cu_p{}^2)w_f = w_f'' - V_f w_f = 0 \tag{183}$$

De esta manera, el potencial fermiónico supersimétrico sería

$$V_f(\eta) = -u_p + cu_p{}^2 = \begin{cases} c(1 + 2\tan^2 c\eta) & \text{si } \kappa = 1 \\ c(-1 + 2\coth^2 c\eta) & \text{si } \kappa = -1 \end{cases} \tag{184}$$

Las soluciones fermiónicas supersimétricas, w_f, son ahora fáciles de hallar, resultando ser

$$w_{f+} = \frac{c}{\cos(c\eta + d)} \qquad \text{y} \qquad w_{f-} = \frac{c}{\sinh(c\eta)} \tag{185}$$

para $\kappa = 1$ y $\kappa = -1$ respectivamente.

Introduciendo el operador de momento cuántico $P_\eta = -iD_\eta$ podemos escribir la ecuación bosónica como sigue

$$(P_\eta - icu_p)(-P_\eta - icu_p)w_b = -P_\eta^2 w_b - c(iP_\eta u_p + cu_p^2)w_b \tag{186}$$

mientras que la ecuación fermiónica sería

$$(-P_\eta - icu_p)(P_\eta - icu_p)w_f = -P_\eta^2 w_f - c(-iP_\eta u_p + cu_p^2)w_f \tag{187}$$

Visto desde esta perspectiva, existe una factorización más general para la ecuación bosónica (182), de la manera [5, 19]

$$\left(\frac{d}{d\eta} + cu_g\right)\left(\frac{d}{d\eta} - u_g\right) w_g = w_g - c(u_g + cu_g^2)w_g = 0 \tag{188}$$

la cual está dada en términos de la solución general de Ricatti $u_g(\eta)$ [9]

$$u_g(\eta;\lambda) = u_p(\eta) + \frac{1}{c}\frac{d}{d\eta}\ln(I_\kappa(\eta)+\lambda) = \frac{1}{c}\frac{d}{d\eta}\ln\left[w_\kappa(\eta)\left(I_\kappa(\eta)+\lambda\right)\right] \tag{189}$$

en donde

$$I_\kappa(\eta) \equiv \int_0^\eta w_\kappa^{-2}(y)dy \tag{190}$$

Entonces, es necesario integrar $I_\kappa(\eta)$ para poder encontrar las soluciones generales de la ec. (189). Sin embargo, de la forma de esta ecuación, y de los resultados obtenidos en la Sec. 3.3, vemos que la soluciones generales $u_g(\eta;\lambda)$ se reducen, en el caso $\kappa = +1$ a

$$u_{g+}(\eta) = \cosh(a\eta + b) \tag{191}$$

en donde a y b son constantes, y en el caso $\kappa = -1$ a

$$u_{g-}(\eta) = \mathrm{senh}(\alpha\eta + \beta) \tag{192}$$

con α y β constantes, las cuales no son otras que las soluciones particulares u_{p+}, u_{p-}, modificadas por una fase que, en el caso $\kappa = +1$, ya habíamos incluido en la ec. (178). ¡En este caso el método de Mielnik no introduce ninguna información nueva! Este no es el caso en general para modelos cosmológicos, y el método de Mielnik puede ser usado para obtener nuevas soluciones exactas en estos models [20, 21, 27].

[9] Compárese esta ecuación con la ec.(61).

5. Conclusiones y perspectivas

Dentro de la gran variedad de soluciones, herramientas y nuevos descubrimientos que ha proporcionado –y que seguirá proporcionando– la mecánica cuántica, el análisis matemático de su estructura revela nuevos panoramas. El método de factorización es el primer y muy importante paso hacia la obtención de un mayor número de problemas solubles, como puede observarse del famoso trabajo desarrollado por Witten y que ahora se muestra como enormemente fructífero.

Basados en el trabajo previo de Mielnik, hemos intentado seguir un poco más adelante en la factorización de operadores de Sturm-Liouville, asociados a las funciones especiales de la física matemática. El método aquí ampliado permite, al menos formalmente, obtener operadores y eigenfunciones isoespectrales a operadores de Sturm-Liouville cuyas soluciones son bien conocidas en la mecánica clásica y la mecánica cuántica. En este trabajo se han desarrollado explícitamente familias uniparamétricas de operadores equivalentes a la mayoría de las ecuaciones conocidas de la física matemática. Nuestro trabajo pone de nuevo al descubierto una veta interesante del método de factorización: la manera relativamente sencilla de obtener estos esquemas isoespectrales, una vez que se conoce la forma de la ecuación diferencial y sus respectivos operadores de escalera. La dependencia entre estas formas isoespectrales viene dada en *todos* los casos por una derivada de primer orden que en principio es fácil de conocer. Así, hemos podido ganar en simplicidad y entendimiento.

La aplicación del método de Mielnik puede ser llevada a cabo de manera importante en el área de cosmología, como aquí se ha desarrollado para el caso de cosmologías barotrópicas FRW, donde aún el campo de soluciones tiene bastante trecho por recorrer. De hecho, algunos aspectos cuánticos "semiclásicos" aún puede dar interesantes resultados, como la aplicación de supersimetría en soluciones tipo WKB.

Este trabajo abre las perspectivas de estudiar problemas de ecuaciones diferenciales donde el parámetro n de las soluciones aparezca, por ejemplo, en un término Q_n en la ecuación (2). Además, las aplicaciones a cosmología todavía producen nuevos resultados

[27], por lo que el método aquí descrito aún puede ser utilizado de manera bastante fructífera en esta área.

Referencias

[1] E. Schrodinger; Proc. Roy. Irish Acad. **A46**, 9 (1940)

[2] L. Infeld y T.E. Hull; Rev. Mod. Phys. **23** (1951) 21.

[3] A. Pérez; Rev. Mex Fís. **42** (1996) 6, 1060-1069.

[4] E. Piña; Rev. Mex. Fís. **41** (1995) 913-924.

[5] B. Mielnik; J. Math. Phys. **25** (1984) 3387-3389.

[6] A. Lahiri, P. K. Roy y B. Bagchi; Int. Jour. Mod. Phys. **5** (1990) 1383-1456.

[7] F. Ravndal; *Proc. CERN School of Physics* (1984) 302.

[8] E. Witten; Nucl.Phys. B**188** (1981) 513.

[9] A. Comtet, A. D. Bandrauk y D. K. Campbell; Phys. Lett. B **150** (1985) 159-162.

[10] P. Salomonson and T.W. Van Holten; Nucl. Phys. B**196** (1982) 509.

[11] F. Cooper and B. Freedman; Ann. Phys. 146 (1983) 262.

[12] "Mathematical Methods for Physicists", por G. B. Arfken y H. J. Weber; Academic Press, 5a edición (2001); pp. 537.

[13] J.Socorro, comunicación privada.

[14] "Gravitation and Cosmology", por S. Weinberg; John Wiley & Sons, 1972.

[15] V. Faraoni; Am. J. Phys. **67** (1999) 732; [physics/9901006].

[16] H. C. Rosu; Mod. Phys. Lett. A **15** (2000) 979. M. Nowakowsky y H. C. Rosu; Phys. Rev. E **65** (2002) 047602.

[17] S. Perlmutter *et al.*; Bull. Am. Astron. Soc. **29** (1997) 1351; [astro-ph/9812473].

[18] C. W. Misner, K. S. Thorne, y J. A. Wheeler, "Gravitation"; Freeman Eds., San Francisco, 1973.

[19] H. C. Rosu; "Short survey of Darboux transformations", en Proc. "Symmetries in Quantum Mechanics and Quantum Optics", Burgos, España, Sept. 21-24, 1998; Eds. A. Ballesteros, F. J. Herranz, J. Negro, L. M. Nieto, y C. M. Pereña; Serv. de Publ. Univ. Burgos, Burgos, España, 1999; pp. 301-315 [quant-ph/9809056].

[20] H. Rosu y J. Socorro; Il Nuovo Cim. B **112** (1998) 119.

[21] H. Rosu y J. Socorro; Phys. Lett. A **223** (1996) 28-30.

[22] F. Cooper, A, Khare, R. Muslo y A. Wipf; Ann. Phys. **187** (1998) 1.

[23] R. J. Hughes, V. A. Kostelecky y M. M. Nieto; Phys. Rev. D **34** 1100.

[24] Y. Nogami y F. M. Toyama; Phys. Rev. A **47** (1993) 1708.

[25] M. A. Reyes, D. Jiménez y H.C. Rosu, "One parameter isospectral special functions", aceptado para publicación en Rev. Mex. Fís.

[26] E. R. Medina, "Mecánica Cuántica Supersimétrica: Aplicación a modelos cosmológicos Bianchi Clase A", Tesis de maestría, IFUG, Noviembre 2001.

[27] J. Socorro, M. A. Reyes, F. A. Gelbert, Phys. Lett. A 2003, en prensa.