Tarea 6 de Análisis Vectorial

Fecha de entrega 17 de Marzo 2015

1.- Al calcular por doble integración el volumen V limitado por encima por la superficie $z = f(x)$ y por la parte inferior por una cierta región S del plano xy, se ha llegado a la siguiente suma de integrales iteradas:

$$V = \int_0^{a \sin c} \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)dxdy + \int_{a \sin c}^{b \sin c} \int_{y \cot c}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)dxdy.$$

Siendo $0 < a < b$ y $0 < c < \pi/2$.

2.- Dadas $A = \int_0^1 e^{-t^2} dt$ y $B = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt$. Calcular la integral reiterada

$$I = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^1 \int_0^x e^{-y^2} dydx.$$

en función de A y de B. Existen enteros positivos m y n tales que

$$I = mA - nB + e^{-1} - e^{-\frac{1}{4}}$$

comprobar esta relación con los resultados obtenidos.

3.- Invertir el orden de integración para deducir la fórmula

$$\int_0^a \int_0^y e^{m(a-x)} f(x)dxdy = \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)dx$$

donde a y m son constantes y $a > 0$.

4.- Un cono se obtiene uniendo todos los puntos de una región plana S con un punto no situado en el plano de S. Designando con A el área de S , y con b la altura del cono. Demostrar:

a) El área de la sección producida por un plano paralelo a la base y a distancia t del vértice es $(t/h)^2 A$, si $\leq t \leq h$.

b) El volumen del cono es $\frac{1}{3}Ah$.

5.- Determinar las coordendas $\overline{x}$ y $\overline{y}$ del centroide, de la región S limitada por 2 o mas curvas

a) $y = \sin x^2$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.
b) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
c) $x - 2y + 8 = 0$, $x + 3y + 5 = 0$, $x = -2$, $x = 4$.

6.- Una lámina delgada está limitada por el arco de parábola $y = 2x - x^2$ y el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Determinar su masa si la densidad en cada punto (x, y) es $\rho(x, y) = \frac{1-y}{1+x}$. 7.- Determinar el centro de gravedad de una lámina delgada rectangular $ABCD$ si la densidad en todos sus puntos es igual al producto de sus distancias a los lados AB y AD.

8.- Demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1 *Sea S el sólido de revolución que se genera al girar la región Q alrededor del eje x. Entonces el volumen $V(S)$ del sólido está dado por: $V(S) = 2\pi a(Q)\overline{y}$ donde $a(Q)$ es el área de Q y $\overline{y}$ la coordenada y de su centroide.*

9.- Usando el teorema calcule el volumen de un toro de revolución, generado por la rotación alrededor del eje x de un círculo de radio r separado una distancia R del eje x.

10.- Demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1 *El centroide de la reunión de 2 regiones planas disjuntas A y B está en el segmento de recta que une al centroide de A con el centroide de B.*