# PARTE 2

# Análisis no lineal

# 8

# CALCULO DIFERENCIAL EN CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

## 8.1 Funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$. Campos escalares y vectoriales

La parte 1 de este volumen se dedica principalmente a las transformaciones lineales

$$T: V \to W$$

de un espacio lineal $V$ en otro espacio lineal $W$. En la parte 2 prescindimos de que $T$ sea lineal pero restringimos los espacios $V$ y $W$ a ser de dimensión finita. Concretamente, consideramos funciones con el dominio en el espacio $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$ y con el recorrido en el espacio $m$-dimensional $\mathbf{R}^m$.

Cuando los dos números $m$ y $n$ son iguales a 1, una tal función se llama función real de una variable real. Cuando $n = 1$ y $m > 1$ se llama función vectorial de una variable real. En el Volumen I se estudiaron ampliamente ejemplos de tales funciones.

En este capítulo suponemos $n > 1$ y $m \geqslant 1$. Cuando $m = 1$ la función se llama función real de una variable vectorial o, más brevemente, un *campo escalar.* Cuando $m > 1$ se llama función vectorial de una variable vectorial, o simplemente *campo vectorial.*

Este capítulo extiende los conceptos de límite, continuidad y derivada, a los campos escalares y vectoriales. Los Capítulos 10 y 11 extienden el concepto de integral.

*Notación:* Los escalares se designarán con tipo de letra corriente, y los vectores con tipo de letra negrita. Si $f$ es un campo escalar definido en un punto $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbf{R}^n$, la notación $f(\boldsymbol{x})$ y $f(x_1, \ldots, x_n)$ se usan indistintamente para designar el valor de $f$ en un cierto punto. Si $\boldsymbol{f}$ es un campo vectorial ponemos $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ o $\boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n)$ para el valor de la función en $\boldsymbol{x}$. Utilizaremos el producto interior

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

y la correspondiente norma $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2}$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Los puntos de $\mathbf{R}^2$ ordinariamente se indican por $(x, y)$ en lugar de $(x_1, x_2)$; y los de $\mathbf{R}^3$ por $(x, y, z)$ en lugar de $(x_1, x_2, x_3)$.

Los campos escalares y vectoriales definidos en subconjunto de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ se presentan con frecuencia en las aplicaciones de la Matemática a las Ciencias naturales y a la Ingeniería. Por ejemplo, si a cada punto $x$ de la atmósfera le asignamos un número real $f(x)$ que represente la temperatura en $x$, la función $f$ así definida es un campo escalar. Si asignamos un vector que represente la velocidad del viento en aquel punto, obtenemos un ejemplo de campo vectorial.

En problemas de Física que tratan con campos escalares o vectoriales es importante saber cómo varía el campo al pasar de un punto a otro. En el caso uni-dimensional la derivada es el instrumento matemático utilizado para estudiar tales cambios. La teoría de la derivada en el caso uni-dimensional maneja funciones definidas en intervalos abiertos. Para extender la teoría a $\mathbf{R}^n$ consideramos generalizaciones de intervalos abiertos llamados *conjuntos abiertos*.

## 8.2 Bolas abiertas y conjuntos abiertos

Sean $a$ un punto dado en $\mathbf{R}^n$ y $r$ un número positivo dado. El conjunto de todos los puntos $x$ de $\mathbf{R}^n$ tales que

$$\|x - a\| < r$$

se llama *n-bola abierta* de radio $r$ y centro $a$. Designamos este conjunto con $B(a;r)$.

La bola $B(a;r)$ está constituida por los puntos cuya distancia a $a$ es menor que $r$. En $\mathbf{R}^1$ es simplemente un intervalo abierto con punto medio en $a$. En $\mathbf{R}^2$ es un disco circular, y en $\mathbf{R}^3$ es un sólido esférico con centro en $a$ y radio $r$.

DEFINICIÓN DE PUNTO INTERIOR. *Sea $S$ un subconjunto de $\mathbf{R}^n$, y supongamos que $a \in S$. Se dice que $a$ es punto interior de $S$ si existe una n-bola abierta con centro en $a$, cuyos puntos pertenecen todos a $S$.*

Es decir, todo punto $a$ interior de $S$ puede rodearse por una $n$-bola $B(a)$ tal que $B(a) \subseteq S$. El conjunto de todos los puntos interiores de $S$ se llaman el *interior* de $S$ y se designa con in $S$. Un conjunto abierto que contenga un punto $a$ se llama a veces *entorno* de $a$.

DEFINICIÓN DE CONJUNTO ABIERTO. *Un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$ se llama abierto si todos sus puntos son interiores. Es decir, $S$ es abierto si y sólo si $S = \operatorname{int} S$.*

EJEMPLOS. En $\mathbf{R}^1$ el tipo más sencillo de conjunto abierto es un intervalo abierto. La reunión de dos o más intervalos abiertos es también abierto. Un intervalo cerrado $[a, b]$ no es un conjunto abierto porque ninguno de los extremos del intervalo puede encerrarse en una 1-bola situada enteramente en el intervalo dado.

La 2-bola $S = B(O;1)$ dibujada en la figura 8.1 es un ejemplo de conjunto abierto en $\mathbf{R}^2$. Todo punto $\boldsymbol{a}$ de $S$ es el centro de un disco situado por entero en $S$. Para algunos puntos el radio de este disco es muy pequeño.

Algunos conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^2$ pueden construirse tomando el producto cartesiano de conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^1$. Si $A_1$ y $A_2$ son subconjuntos de $\mathbf{R}^1$, su producto cartesiano $A_1 \times A_2$ es el conjunto definido en $\mathbf{R}^2$ por

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \quad \text{and} \quad a_2 \in A_2\}.$$

En la figura 8.2 se ha dibujado un ejemplo. Los conjuntos $A_1$ y $A_2$ son intervalos, y $A_1 \times A_2$ es un rectángulo.

Si $A_1$ y $A_2$ son subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^1$, entonces $A_1 \times A_2$ será un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^2$. Para probar esto, elijamos un punto cualquiera $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$

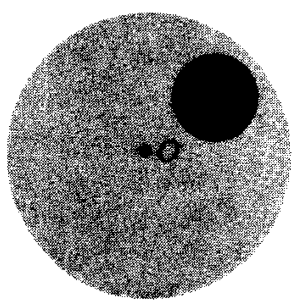



FIGURA 8.1 *El disco $B(O; 1)$ es un conjunto abierto en $\mathbf{R}^2$*

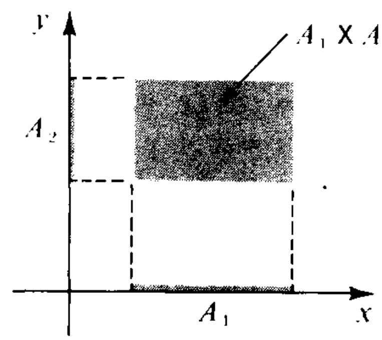



FIGURA 8.2 *El producto cartesiano de dos intervalos abiertos es un rectángulo abierto.*

en $A_1 \times A_2$. Tenemos que demostrar que $\boldsymbol{a}$ es un punto interior de $A_1 \times A_2$. Puesto que $A_1$ y $A_2$ son abiertos en $\mathbf{R}^1$ existe una 1-bola $B(a_1; r_1)$ en $A_1$ y una 1-bola $B(a_2; r_2)$ en $A_2$. Sea $r = \min\{r_1, r_2\}$. Podemos fácilmente demostrar que la 2-bola $(B(\boldsymbol{a}; r) \subseteq A_1 \times A_2$. En efecto, si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ es un punto cualquiera de $B(\boldsymbol{a}; r)$ entonces $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r$, así que $|x_1 - a_1| < r_1$ y $|x_2 - a_2| < r_2$. Luego $x_1 \in B(a_1; r_1)$ y $x_2 \in B(a; r_2)$. Por consiguiente $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$, así que $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$. Esto demuestra que todo punto de $B(\boldsymbol{a}; r)$ está en $A_1 \times A_2$. Por lo tanto todo punto de $A_1 \times A_2$ es un punto interior, así que $A_1 \times A_2$ es abierto.

El lector debería comprobar que un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^1$ ya no es un conjunto abierto cuando se considera como subconjunto de $\mathbf{R}^2$, porque un subconjunto de $\mathbf{R}^1$ no puede contener una 2-bola.

DEFINICIONES DE EXTERIOR Y FRONTERA. *Un punto $x$ se llama exterior al conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$ si existe una n-bola $B(x)$ que no contiene puntos de $S$. El conjunto de todos los puntos de $\mathbf{R}^n$ exteriores a $S$ se llama el exterior de $S$ y se designa con $\operatorname{ext} S$. Un punto que no es interior ni exterior a $S$ se llama punto frontera de $S$. El conjunto de todos los puntos frontera de $S$ es la frontera de $S$ y se designa con $\partial S$.*

Estos conceptos se representan en la figura 8.1. El exterior de $S$ es el conjunto de todos los $x$ tales que $\|x\| > 1$. La frontera de $S$ la constituyen todos los $x$ con $\|x\| = 1$.

## 8.3 Ejercicios

1. Sean $f$ un campo escalar definido en un conjunto $S$ y $c$ un número real dado. El conjunto de todos los puntos $x$ de $S$ tales que $f(x) = c$ se llama *conjunto de nivel* de $f$. (En un capítulo posterior se discutirán problemas geométricos y físicos en los que se presentan conjuntos de nivel.) Para cada uno de los campos escalares siguientes, $S$ es todo el espacio $\mathbf{R}^n$. Hacer un dibujo para describir los conjuntos de nivel correspondientes a los valores dados de $c$.

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\quad c = 0, 1, 4, 9$.
   b) $f(x, y) = e^{xy}$, $\quad c = e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, e^3$.
   c) $f(x, y) = \cos(x + y)$, $\quad c = -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1$.
   d) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\quad c = -1, 0, 1$.
   e) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\quad c = 0, 6, 12$.
   f) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$, $\quad c = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1$.

2. En cada uno de los casos siguientes, sea $S$ el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ del plano que satisfacen las desigualdades dadas. Hacer un gráfico mostrando el conjunto $S$ y explicar, geométricamente, si $S$ es o no abierto. Indicar la frontera de $S$ en el gráfico.

   a) $x^2 + y^2 < 1$.
   b) $3x^2 + 2y^2 < 6$.
   c) $|x| < 1$ y $|y| < 1$.
   d) $x \geq 0$ y $y > 0$.
   e) $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$.
   f) $x > 0$ y $y < 0$.
   g) $xy < 1$.
   h) $1 \leq x \leq 2$ y $3 < y < 4$.
   i) $1 < x < 2$ y $y > 0$.
   j) $x \geq y$.
   k) $x > y$.
   l) $y > x^2$ y $|x| < 2$.
   m) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$.
   n) $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$.

3. En cada uno de los siguientes casos, sea $S$ el conjunto de todos los puntos $(x, y, z)$, en el espacio tri-dimensional, que satisfacen las desigualdades dadas y determinar si $S$ es o no abierto.

   a) $z^2 - x^2 - y^2 - 1 > 0$.
   b) $|x| < 1$, $|y| < 1$, y $|z| < 1$.
   c) $x + y + z < 1$.
   d) $|x| \leq 1$, $|y| < 1$, y $|z| < 1$.
   e) $x + y + z < 1$ y $x > 0, y > 0, z > 0$.
   f) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 16y + 40z + 113 < 0$.

4. a) Si $A$ es un conjunto abierto en un espacio de dimensión $n$ y si $x \in A$, demostrar que el conjunto $A - \{x\}$, obtenido suprimiendo de $A$ el punto $x$, es abierto.
   b) Si $A$ es un intervalo abierto en la recta real y $B$ un subintervalo de $A$ cerrado, demostrar que $A - B$ es abierto. (*)
   c) Si $A$ y $B$ son intervalos abiertos en la recta real, demostrar que $A \cap B$ y $A \cup B$ son abiertos.
   d) Si $A$ es un intervalo cerrado en la recta real, demostrar que su complemento (respecto a la recta real completa) es abierto.
5. Demostrar las siguientes propiedades de los conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^n$:
   a) El conjunto vacío $\varnothing$ es abierto.
   b) $\mathbf{R}^n$ es abierto.
   c) La reunión de una colección cualquiera de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
   d) La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
   e) Dar un ejemplo para demostrar que la intersección de una colección infinita de conjuntos abiertos no es necesariamente abierta.

*Conjuntos cerrados.* Un conjunto $S$ en $\mathbf{R}^n$ se llama *cerrado* si su complemento $\mathbf{R}^n - S$ es abierto. Los tres ejercicios siguientes se refieren a las propiedades de los conjuntos cerrados.

6. En cada uno de los siguientes casos, sea $S$ el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ de $\mathbf{R}^2$ que satisfacen las condiciones dadas. Hacer un gráfico mostrando el conjunto $S$ y dar una razón geométrica para explicar si $S$ es abierto, cerrado, cerrado y abierto a la vez, o ni cerrado ni abierto.

| | |
|---|---|
| a) $x^2 + y^2 \geq 0$. | g) $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq y \leq 4$. |
| b) $x^2 + y^2 < 0$. | h) $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq y < 4$. |
| c) $x^2 + y^2 \leq 1$. | i) $y = x^2$. |
| d) $1 < x^2 + y^2 < 2$. | j) $y \geq x^2$. |
| e) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. | k) $y \geq x^2$ y $\lvert x\rvert < 2$. |
| f) $1 < x^2 + y^2 \leq 2$. | l) $y \geq x^2$ y $\lvert x\rvert \leq 2$. |

7. a) Si $A$ es un conjunto cerrado en el espacio n-dimensional y $x$ es un punto no perteneciente a $A$, demostrar que $A \cup \{x\}$ es también cerrado.
   b) Demostrar que un intervalo cerrado $[a, b]$ en la recta real es un conjunto cerrado.
   c) Si $A$ y $B$ son intervalos cerrados en la recta real, demostrar que $A \cap B$ y $A \cup B$ son cerrados.
8. Demostrar las propiedades siguientes de los conjuntos cerrados de $\mathbf{R}^n$. Pueden utilizarse los resultados del ejercicio 5.
   a) El conjunto vacío $\varnothing$ es cerrado.
   b) $\mathbf{R}^n$ es cerrado.
   c) La intersección de una colección cualquiera de conjuntos cerrados es cerrada.
   d) La reunión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrada.
   e) Dar un ejemplo para probar que la reunión de una colección infinita de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrada.
9. Sea $S$ un subconjunto de $\mathbf{R}^n$.
   a) Demostrar que $\operatorname{int} S$ y $\operatorname{ext} S$ son ambos conjuntos abiertos.
   b) Demostrar que $\mathbf{R}^n = (\operatorname{int} S) \cup (\operatorname{ext} S) \cup \partial S$, es una reunión de conjuntos disjuntos, y utilizar esto para deducir que la frontera $\partial S$ siempre es un conjunto cerrado.

(*) Si $A$ y $B$ son dos conjuntos, la diferencia $A - B$ (llamada *complemento de B respecto de A*) es el conjunto de todos los elementos de $A$ que no pertenecen a $B$.

10. Dado un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$ y un punto $\boldsymbol{x}$ con la propiedad de que toda bola $B(x)$ contiene puntos interiores y exteriores a $S$ simultáneamente. Demostrar que $\boldsymbol{x}$ es un punto frontera de $S$. ¿Es cierta la proposición inversa? Esto es, ¿todo punto frontera de $S$ tiene necesariamente esta propiedad?
11. Sea $S$ un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Demostrar que $\operatorname{ext} S = \operatorname{int}(\mathbf{R}^n - S)$.
12. Demostrar que un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$ es cerrado si y sólo si $S = (\operatorname{int} S) \cup \partial S$.

## 8.4 Límites y continuidad

Los conceptos de límite y continuidad se pueden extender con facilidad a los campos escalares y vectoriales. Formularemos las definiciones para campos vectoriales; las mismas se extienden a los campos escalares.

Consideremos una función $\boldsymbol{f}\colon S \to \mathbf{R}^m$, donde $S$ es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Si $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ escribimos

$$(8.1) \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \qquad (\text{o, } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{b} \ \text{ cuando } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$$

para significar que

$$(8.2) \qquad \lim_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\| = 0 .$$

El símbolo de límite de la igualdad (8.2) es el límite corriente del Cálculo elemental. En esta definición no se exige que $\boldsymbol{f}$ esté definida en el mismo punto $\boldsymbol{a}$.

Si escribimos $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ , la igualdad (8.2) se convierte en

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{b}\| = 0 .$$

Para los puntos de $\mathbf{R}^2$ escribimos $(x, y)$ para $\boldsymbol{x}$ y $(a, b)$ para $\boldsymbol{a}$ y expresamos la relación de límite (8.1) como sigue:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \boldsymbol{f}(x, y) = \boldsymbol{b} .$$

Para los puntos de $\mathbf{R}^3$ ponemos $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ y $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ y escribimos

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \boldsymbol{f}(x, y, z) = \boldsymbol{b} .$$

Una función $\boldsymbol{f}$ se llama *continua* en $\boldsymbol{a}$ si $\boldsymbol{f}$ está definida en $\boldsymbol{a}$ y si

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) .$$

Decimos que $\boldsymbol{f}$ es *continua en un conjunto* $S$ si $\boldsymbol{f}$ es continua en cada punto de $S$.

Puesto que esas definiciones son extensiones directas del caso uni-dimensional, no debe sorprender que muchas de las propiedades de los límites y de la continuidad pueden también extenderse. Por ejemplo, los teoremas relativos a los límites y a la continuidad de sumas, productos y cocientes son también ciertos para campos escalares. Para campos vectoriales, los cocientes no están definidos pero tenemos el teorema siguiente relativo a sumas, multiplicación por escalares, productos interiores y normas.

TEOREMA 8.1. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = c$, *tenemos también:*

a) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = b + c$.

b) $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b$ *para todo escalar* $\lambda$.

c) $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$.

d) $\lim_{x\to a} \|f(x)\| = \|b\|$.

*Demostración.* Sólo vamos a demostrar las partes c) y d); las demostraciones de a) y b) se dejan como ejercicios para el lector.

Para demostrar c) escribimos

$$f(x) \cdot g(x) - b \cdot c = [f(x) - b] \cdot [g(x) - c] + b \cdot [g(x) - c] + c \cdot [f(x) - b].$$

Apliquemos ahora la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz obteniendo

$$0 \leq \|f(x) \cdot g(x) - b \cdot c\| \leq \|f(x) - b\| \, \|g(x) - c\| + \|b\| \, \|g(x) - c\| + \|c\| \, \|f(x) - b\|.$$

Puesto que $\|f(x) - b\| \to 0$ y $\|g(x) - c\| \to 0$ cuando $x \to a$, esto prueba que $\|f(x) \cdot g(x) - b \cdot c\| \to 0$ cuando $x \to a$, lo cual demuestra c).

Tomando $f(x) = g(x)$ en el apartado c) encontramos

$$\lim_{x\to a} \|f(x)\|^2 = \|b\|^2,$$

de la que obtenemos d).

EJEMPLO 1. *Continuidad y componentes de un campo vectorial.* Si un campo vectorial $f$ tiene los valores en $\mathbf{R}^m$, cada uno de los valores $f(x)$ tiene $m$ componentes y podemos escribir

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Los $m$ campos escalares $f_1, \ldots, f_m$ se llaman *componentes* del campo vectorial $\boldsymbol{f}$. Demostraremos que $\boldsymbol{f}$ es continuo en un punto si, y sólo si, cada componente $f_k$ es continuo en dicho punto.

Designemos con $\boldsymbol{e}_k$ el $k$-ésimo vector coordenado unidad (todos los componentes de $\boldsymbol{e}_k$ son 0 excepto el $k$-ésimo, que es igual a 1). Entonces $f_k(\boldsymbol{x})$ viene dado por el producto interior

$$f_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_k .$$

Por consiguiente, el apartado c) del teorema 8.1 demuestra que cada punto de continuidad de $\boldsymbol{f}$ lo es también de $f_k$. Además, puesto que tenemos

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_k ,$$

la aplicación reiterada de los apartados a) y b) del teorema 8.1 demuestra que un punto de continuidad de todos los $m$ componentes $f_1, \ldots, f_m$ es también punto de continuidad de $\boldsymbol{f}$.

EJEMPLO 2. *Continuidad de la función identidad.* La función identidad, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, es continua en todo $\mathbf{R}^n$. Por tanto sus componentes también son continuos en todo $\mathbf{R}^n$. Esos son $n$ campos escalares dados por

$$f_1(\boldsymbol{x}) = x_1 , f_2(\boldsymbol{x}) = x_2 , \ldots , f_n(\boldsymbol{x}) = x_n .$$

EJEMPLO 3. *Continuidad de las transformaciones lineales.* Sea $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal. Demostraremos que $\boldsymbol{f}$ es continua en cada punto $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{R}^n$. En virtud de la linealidad tenemos

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) .$$

Por consiguiente, basta demostrar que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) \to \boldsymbol{O}$ cuando $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{O}$ . Poniendo $\boldsymbol{h}$ en función de sus componentes tenemos $\boldsymbol{h} = h_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n$. Usando la linealidad, tenemos $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) = h_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + h_n\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)$. Esto demuestra que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) \to \boldsymbol{O}$ cuando $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{O}$.

EJEMPLO 4. *Continuidad de los polinomios de n variables.* Un campo escalar $P$ definido en $\mathbf{R}^n$ por una fórmula de la forma

$$P(\boldsymbol{x}) = \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{p_n} c_{k_1 \cdots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

se llama polinomio de $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$. Un polinomio es continuo en todo

$\mathbf{R}^n$ debido a que es una suma finita de productos de campos escalares continuos en todo $\mathbf{R}^n$. Por ejemplo, un polinomio de dos variables $x$ e $y$, dado por

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} c_{ij} x^i y^j$$

es continuo en todo punto $(x, y)$ en $\mathbf{R}^2$.

EJEMPLO 5. *Continuidad de las funciones racionales.* Un campo escalar $f$ dado por $f(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{x})/Q(\boldsymbol{x})$, donde $P$ y $Q$ son polinomios en los componentes de $\boldsymbol{x}$, se llama función racional. Tal función es continua en cada punto en donde $Q(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Pueden construirse otros ejemplos de funciones continuas con la ayuda del siguiente teorema, que está relacionado con la continuidad de las funciones compuestas.

TEOREMA 8.2. *Sean $f$ y $g$ dos funciones tales que la función compuesta $f \circ g$ está definida en $\boldsymbol{a}$, siendo*

$$(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = f[g(\boldsymbol{x})].$$

*Si $g$ es continua en $\boldsymbol{a}$ y $f$ es continua en $g(\boldsymbol{a})$, la función compuesta $f \circ g$ es continua en $\boldsymbol{a}$.*

*Demostración.* Sean $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a})$. Tenemos

$$f[g(\boldsymbol{x})] - f[g(\boldsymbol{a})] = f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{b}).$$

Por hipótesis, $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{b}$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, así que tenemos

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \to 0} \|f[g(\boldsymbol{x})] - f[g(\boldsymbol{a})]\| = \lim_{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\| \to 0} \|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{b})\| = 0.$$

Por consiguiente $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f[g(\boldsymbol{x})] = f[g(\boldsymbol{a})]$ , así que $f \circ g$ es continua en $\boldsymbol{a}$.

EJEMPLO 6. El teorema anterior implica la continuidad de los campos escalares $h$, cuando $h(x, y)$ está dada por fórmulas tales como

$$\operatorname{sen}(x^2 y), \qquad \log(x^2 + y^2), \qquad \frac{e^{x+y}}{x+y}, \qquad \log[\cos(x^2 + y^2)].$$

En estos ejemplos las funciones son continuas en todos los puntos en los que están definidas. La primera lo es en todos los puntos del plano y la segunda en todos los puntos excepto en el origen. La tercera es continua en todos los puntos $(x, y)$ en los que $x + y \neq 0$, y la cuarta en todos los puntos en los que $x^2 + y^2$ no sea un múltiplo impar de $\pi/2$. [El conjunto de los puntos $(x, y)$ tales que $x^2 + y^2 = n\pi/2$, $n = 1, 3, 5, \ldots$, es una familia de circunferencias con centro en el origen.] Estos ejemplos demuestran que las discontinuidades de una función de dos variables pueden ser puntos aislados, curvas, o familias de curvas.

EJEMPLO 7. Una función de dos variables puede ser continua respecto a cada variable separadamente y en cambio ser discontinua como función de dos variables. Esto lo apreciamos en el ejemplo siguiente:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Para los puntos $(x, y)$ del eje $x$ tenemos $y = 0$ y $f(x, y) = f(x, 0) = 0$, así que la función tiene el valor constante 0 en todo el eje $x$. Por consiguiente, si ponemos $y = 0$ y consideramos $f$ sólo como función de $x$, dicha $f$ es continua en $x = 0$. Análogamente, $f$ tiene el valor constante 0 en todos los puntos del eje $y$, así que si ponemos $x = 0$ y consideramos $f$ como función sólo de $y$, $f$ es continua en $y = 0$. No obstante, como función de las dos variables, $f$ no es continua en el origen. En efecto, en cada punto de la recta $y = x$ (excepto en el origen) la función tiene el valor constante $\frac{1}{2}$ ya que $f(x, x) = x^2/(2x^2) = \frac{1}{2}$; puesto que existen puntos en esa recta tan próximos al origen como queramos y ya que $f(0, 0) \neq \frac{1}{2}$, la función no es continua en $(0, 0)$.

## 8.5 Ejercicios

Los ejercicios de esta sección se refieren a límites y a la continuidad de campos escalares definidos en subconjuntos del plano.

1. En cada uno de los siguientes ejemplos se define un campo escalar $f$ mediante la ecuación dada para todos los puntos $(x, y)$ del plano definidos por la expresión del segundo miembro. Determinar en cada ejemplo el conjunto de puntos $(x, y)$ en los que $f$ es continua.

   a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

   b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

   c) $f(x, y) = \dfrac{1}{y} \cos x^2$.

   d) $f(x, y) = \operatorname{tg} \dfrac{x^2}{y}$.

   e) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$.

   f) $f(x, y) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

g) $f(x, y) = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$.

h) $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

i) $f(x, y) = x^{(y^2)}$.

j) $f(x, y) = \arccos \sqrt{x/y}$.

2. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$, y si existen los dos límites uni-dimensionales

$$\lim_{x\to a} f(x, y) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to b} f(x, y)$$

demostrar que

$$\lim_{x\to a}\, [\lim_{y\to b} f(x, y)] = \lim_{y\to b}\, [\lim_{x\to a} f(x, y)] = L\,.$$

Los dos límites de esta igualdad se llaman límites *iterados*; los ejercicios demuestran que la existencia del límite bidimensional y de los dos límites unidimensionales, implican la existencia e igualdad de los dos límites iterados. (El recíproco no siempre es cierto. En el ejercicio 4 se da un contraejemplo.)

3. Sea $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$ si $x + y \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\, [\lim_{y\to 0} f(x, y)] = 1 \qquad \text{pero que} \qquad \lim_{y\to 0}\, [\lim_{x\to 0} f(x, y)] = -1\,.$$

Utilizar ese resultado y el del ejercicio 2 para deducir que $f(x, y)$ no tiende a un límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

4. Sea

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2} \qquad \text{siempre que } x^2y^2 + (x - y)^2 \neq 0\,.$$

Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\, [\lim_{y\to 0} f(x, y)] = \lim_{y\to 0}\, [\lim_{x\to 0} f(x, y)] = 0$$

pero que $f(x, y)$ no tiende a un límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$. [*Indicación*: Examinar $f$ sobre la recta $y = x$.] Este ejemplo demuestra que el recíproco del ejercicio 2 no siempre es cierto.

5. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si } y \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } y = 0\,. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ pero que

$$\lim_{y\to 0}\, [\lim_{x\to 0} f(x, y)] \neq \lim_{x\to 0}\, [\lim_{y\to 0} f(x, y)]\,.$$

Explicar por qué esto no contradice el ejercicio 2.

6. Si $(x, y) \neq (0, 0)$, pongamos $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$. ¿Es posible definir $f(0, 0)$ de modo que $f$ sea continua en $(0, 0)$?
7. Sea $f(x, y) = 0$ si $y \leq 0$ o si $y \geq x^2$ y sea $f(x, y) = 1$ si $0 < y < x^2$. Demostrar que $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier recta por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x, y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es $f$ continua en el origen?
8. Si $f(x, y) = [\operatorname{sen}(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$ cuando $(x, y) \neq (0, 0)$ ¿cómo debe definirse $f(0, 0)$ para que sea $f$ continua en el origen?
9. Sea $f$ un campo escalar continuo en un punto $\boldsymbol{a}$ interior a un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$. Si $f(\boldsymbol{a}) \neq 0$, demostrar que existe una $n$-bola $B(\boldsymbol{a})$ en la que $f$ tiene el mismo signo que $f(\boldsymbol{a})$.

## 8.6 La derivada de un campo escalar respecto a un vector

Esta sección introduce las derivadas de campos escalares. En la sección 8.18 se discuten las derivadas de campos vectoriales.

Sea $f$ un campo escalar definido en un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$, y sea $\boldsymbol{a}$ un punto interior a $S$. Deseamos estudiar la variación del campo cuando nos desplazamos desde $\boldsymbol{a}$ a un punto próximo. Por ejemplo, supongamos que $f(\boldsymbol{a})$ es la temperatura en un punto $\boldsymbol{a}$ en una habitación con calefacción y con una ventana abierta. Si nos movemos hacia la ventana la temperatura decrecerá, pero si nos acercamos al radiador de la calefacción aumentará. En general, la variación del campo dependerá de la dirección en la que nos movamos a partir de $\boldsymbol{a}$.

Supongamos que se representa esa dirección mediante otro vector $\boldsymbol{y}$. Esto es, supongamos que nos movemos desde $\boldsymbol{a}$ hacia otro punto $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}$, siguiendo el segmento de recta que une $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}$. Cada punto de este segmento tiene la forma $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$, donde $h$ es un número real. En la figura 8.3 se muestra un ejemplo. La distancia desde $\boldsymbol{a}$ hasta $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ es $\|h\boldsymbol{y}\| = |h|\,\|\boldsymbol{y}\|$.

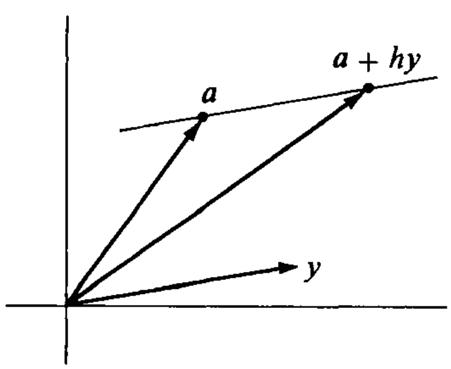



FIGURA 8.3 *El punto $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ está en la recta paralela a $\boldsymbol{a}$ que pasa por $\boldsymbol{y}$.*

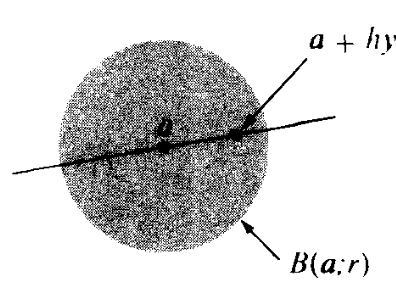



FIGURA 8.4 *El punto $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ está en la $n$-bola $B(\boldsymbol{a}; r)$ si $\|h\boldsymbol{y}\| < r$.*

Puesto que $\boldsymbol{a}$ es un punto interior de $S$, existe una $n$-bola $B(\boldsymbol{a}; r)$ situada enteramente en $S$. Si $h$ se elige de manera que $|h| \, \|\boldsymbol{y}\| < r$, el segmento desde $\boldsymbol{a}$ hasta $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ estará en $S$. (Ver figura 8.4) Mantengamos $h \neq 0$ pero lo bastante pequeño para que $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y} \in S$ y construyamos el cociente de diferencias

$$\frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h}. \tag{8.3}$$

El numerador de este cociente pone de manifiesto el cambio de la función cuando nos desplazamos desde $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$. El cociente se denomina a su vez el *promedio de variación* de $f$ en el segmento de recta que une $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$. Nos interesa el comportamiento de ese cociente cuando $h \to 0$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UN CAMPO ESCALAR RESPECTO A UN VECTOR. *Dado un campo escalar $f\colon S \to \mathbf{R}$, donde $S \subseteq \mathbf{R}^n$. Sean $\boldsymbol{a}$ un punto interior a $S$ e $\boldsymbol{y}$ un punto arbitrario de $\mathbf{R}^n$. La derivada de $f$ en $\boldsymbol{a}$ con respecto a $\boldsymbol{y}$ se representa con el símbolo $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$* y se define

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h} \tag{8.4}$$

*cuando tal límite existe.*

EJEMPLO 1. Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{O}$, el cociente de diferencias (8.3) es 0 para todo $h \neq 0$, así que $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{O})$ existe siempre y es igual a 0.

EJEMPLO 2. *Derivada de una transformación lineal.* Si $f\colon S \to \mathbf{R}$ es lineal, entonces $f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{a}) + hf(\boldsymbol{y})$ y el cociente de diferencias (8.3) es igual a $f(\boldsymbol{y})$ para todo $h \neq 0$. En este caso, $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ existe siempre y está dada por

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y})$$

para todo $\boldsymbol{a}$ de S y todo $\boldsymbol{y}$ de $\mathbf{R}^n$. Dicho de otro modo, la derivada de una transformación lineal respecto a $\boldsymbol{y}$ es igual al valor de la función en $\boldsymbol{y}$.

Para estudiar el comportamiento de $f$ sobre la recta que pasa por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}$ para $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{O}$ introducimos la función

$$g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y}).$$

El teorema que sigue relaciona las derivadas $g'(t)$ y $f'(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y}; \boldsymbol{y})$.

TEOREMA 8.3. *Si $g(t) = f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{y})$ y si una de las derivadas $g(t)$ o $f'(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{y};\boldsymbol{y})$ existe, entonces también existe la otra y coinciden,*

$$g'(t) = f'(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y}; \boldsymbol{y}). \tag{8.5}$$

*En particular, cuando $t = 0$ tenemos $g'(0) = f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$.*

*Demostración.* Formando el cociente de diferencias para $g$, tenemos

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y})}{h}$$

Haciendo que $h \to 0$ obtenemos (8.5).

EJEMPLO 3. Calcular $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ si $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$ para todo $\boldsymbol{x}$ en $\mathbf{R}^n$.

*Solución.* Pongamos $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + 2t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y} + t^2\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}$. Por consiguiente $g'(t) = 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y} + 2t\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}$, así que $g'(0) = f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}$.

Un corolario sencillo del Teorema 8.3 es el teorema del valor medio para campos escalares.

TEOREMA 8.4. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS DE CAMPOS ESCALARES. *Supongamos que existe la derivada $f'(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y}; \boldsymbol{y})$ para cada $t$ en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 1$. Entonces para un cierto número real $\theta$ en el intervalo abierto $0 < \theta < 1$ tenemos*

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{y}), \qquad \text{donde} \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{y}.$$

*Demostración.* Pongamos $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{y})$. Aplicando el teorema del valor medio uni-dimensional a $g$ en el intervalo $[0, 1]$ tenemos

$$g(1) - g(0) = g'(\theta), \qquad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1.$$

Puesto que $g(1) - g(0) = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})$ y $g'(\theta) = f'(\boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{y}; \boldsymbol{y})$, esto completa la demostración.

## 8.7 Derivadas direccionales y derivadas parciales

En el caso particular en el que $\boldsymbol{y}$ es un vector *unitario,* esto es, cuando $\|\boldsymbol{y}\| = 1$, la distancia entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ es $|h|$. En tal caso el cociente de diferencias (8.3) representa el promedio de variación de $f$ por *unidad de distancia* a lo largo del segmento de recta que une $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$; la derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ se denomina *derivada direccional.*

DEFINICIÓN DE DERIVADAS DIRECCIONAL Y PARCIAL. *Si $\boldsymbol{y}$ es un vector unitario, la derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ se llama la derivada direccional de $f$ en $\boldsymbol{a}$ en la dirección de $\boldsymbol{y}$. En particular, si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_k$ (el k-ésimo vector coordenado unitario) la derivada direccional $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}_k)$ se denomina derivada parcial respecto a $\boldsymbol{e}_k$ y se representa también mediante el símbolo $D_k f(\boldsymbol{a})$. Así pues*

$$D_k f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}_k).$$

Las siguientes notaciones se usan también para la derivada parcial $D_k f(\boldsymbol{a})$:

$$D_k f(a_1, \ldots, a_n), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \ldots, a_n), \qquad \text{y} \qquad f'_{x_k}(a_1, \ldots, a_n).$$

Algunas veces la derivada $f'_{x_k}$ se escribe sin el ápice $f_{x_k}$, o incluso más sencillamente $f_k$.

En $\mathbf{R}^2$ los vectores coordenados unidad se designan por $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$. Si $\boldsymbol{a} = (a, b)$ las derivadas parciales $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{i})$ y $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{j})$ también se escriben

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b),$$

respectivamente. En $\mathbf{R}^3$, si $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ las derivadas parciales $D_1 f(\boldsymbol{a}), D_2 f(\boldsymbol{a})$, y $D_3 f(\boldsymbol{a})$ se expresan poniendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c).$$

## 8.8 Derivadas parciales de orden superior

La derivación parcial origina nuevos campos escalares $D_1 f, \ldots, D_n f$ a partir de un campo escalar dado $f$. Las derivadas parciales de $D_1 f, \ldots, D_n f$ se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de $f$. Para funciones de dos variables existen cuatro derivadas parciales de segundo orden, que se escriben así:

$$D_1(D_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad D_1(D_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \qquad D_2(D_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \qquad D_2(D_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Obsérvese que $D_1(D_2f)$ significa la derivada parcial de $D_2f$ respecto a la primera variable. Algunas veces utilizamos la notación $D_{i,j}f$ para indicar la derivada parcial $D_i(D_jf)$. Por ejemplo, $D_{1,2}f = D_1(D_2f)$. También utilizamos la notación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Ésta puede ser o no igual a la otra derivada parcial mixta,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

En la sección 8.23 demostraremos que las dos derivadas parciales mixtas $D_1(D_2f)$ y $D_2(D_1f)$ son iguales en un punto si una de ellas es continua en un entorno del punto. También la sección 8.23 contiene un ejemplo en el que $D_1(D_2f) \neq D_2(D_1f)$ en un punto.

## 8.9 Ejercicios

1. Un campo escalar $f$ está definido en $\mathbf{R}^n$ mediante la ecuación $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante. Calcular $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ cualesquiera que sean $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.
2. a) Resolver el ejercicio 1 cuando $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^4$.
   b) Tomar $n = 2$ en a) y hallar todos los puntos $(x, y)$ para los cuales $f'(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 6$.
   c) Tomar $n = 3$ en a) y hallar todos los puntos $(x, y, z)$ para los cuales $f'(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 0$.
3. Sea $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una transformación lineal dada. Calcular la derivada $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ para el campo escalar definido en $\mathbf{R}^n$ mediante la ecuación $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot T(\boldsymbol{x})$.

En cada uno de los ejercicios del 4 al 9, calcular todas las derivadas parciales de primer orden del campo escalar dado. En los ejercicios 8 y 9 los campos están definidos en $\mathbf{R}^n$.

4. $f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$.
5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$.
7. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}, \quad x \neq y$.
8. $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{a}$ fijo.
9. $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$.

En cada uno de los ejercicios del 10 al 17, calcular todas las derivadas parciales de primer orden. En los ejercicios 10, 11 y 12 comprobar que las derivadas parciales mixtas $D_1(D_2f)$ y $D_2(D_1f)$ son iguales.

10. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.
11. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2), \quad (x, y) \neq (0, 0)$.
12. $f(x, y) = \dfrac{1}{y} \cos x^2, \quad y \neq 0$.
13. $f(x, y) = \tan(x^2/y), \quad y \neq 0$.
14. $f(x, y) = \arctan(y/x), \quad x \neq 0$.
15. $f(x, y) = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}, \quad xy \neq 1$.
16. $f(x, y) = x^{(y^2)}, \quad x > 0$.
17. $f(x, y) = \arccos \sqrt{x/y}, \quad y \neq 0$.

18. Sea $v(r,t) = t^n e^{-r^2/(4t)}$. Hallar un valor de la constante $n$ tal que $v$ satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

19. Dada $z = u(x, y)e^{ax+by}$ y $\partial^2 u/\partial x\, \partial y) = 0$. Hallar valores de las constantes $a$ y $b$ tales que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

20. a) Suponer que $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = 0$ para todo $\boldsymbol{x}$ en una cierta $n$-bola $B(\boldsymbol{a})$ y para todo vector $\boldsymbol{y}$. Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que $f$ es constante en $B(\boldsymbol{a})$.
b) Suponer que $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = 0$ para un vector *fijo* $\boldsymbol{y}$ y todo $\boldsymbol{x}$ en $B(\boldsymbol{a})$. ¿Qué puede decirse de $f$ en este caso?
21. Un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$ se llama *convexo* si para todo par de puntos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de $S$ el segmento de recta que une $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{b}$ pertenece también a $S$; dicho de otro modo, $t\boldsymbol{a} + (1 - t)\boldsymbol{b} \in S$ para cada $t$ del intervalo $0 \leq t \leq 1$.
a) Demostrar que toda $n$-bola es convexa.
b) Si $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = 0$ para todo $\boldsymbol{x}$ en un conjunto convexo abierto $S$ y todo $\boldsymbol{y}$ de $\mathbf{R}^n$, demostrar que $f$ es constante en $S$.
22. a) Demostrar que no existe un campo escalar $f$ tal que $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) > 0$ para un vector fijo $\boldsymbol{a}$ y todo vector no nulo $\boldsymbol{y}$.
b) Dar un ejemplo de un campo escalar $f$ tal que $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) > 0$ para un vector fijo $\boldsymbol{y}$ y todo vector $\boldsymbol{x}$.

## 8.10 Derivadas direccionales y continuidad

En la teoría uni-dimensional, la existencia de la derivada de una función $f$ en un punto implica la continuidad en aquel punto. Esto se demuestra fácilmente eligiendo un $h \neq 0$ y escribiendo

$$f(a + h) - f(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot h.$$

Cuando $h \to 0$ el segundo miembro tiende al límite $f'(a) \cdot 0 = 0$ y por tanto $f(a + h) \to f(a)$. Esto prueba que la existencia de $f'(a)$ implica la continuidad de $f$ en $a$.

Supongamos que aplicamos el mismo razonamiento a un campo escalar general. Supongamos que existe la derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ para un cierto $\boldsymbol{y}$. Entonces si $h \neq 0$ podemos escribir

$$f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h} \cdot h.$$

Cuando $h \to 0$ el segundo miembro tiende al límite $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) \cdot 0 = 0$; luego la existencia de $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ para un $\boldsymbol{y}$ dado implica que

$$\lim_{h \to 0} f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{a})$$

para el mismo $\boldsymbol{y}$. Esto significa que $f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{a})$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ *a lo largo de la recta de dirección* $\boldsymbol{y}$ *que pasa por* $\boldsymbol{a}$. Si $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ existe para todo *vector* $\boldsymbol{y}$, entonces $f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{a})$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ a lo largo de toda recta que pase por $\boldsymbol{a}$. Esto parece sugerir que $f$ es continua en $\boldsymbol{a}$. Sin embargo, sorprende que esta conclusión no es necesariamente cierta. El ejemplo que sigue muestra un campo escalar que tiene derivada direccional en $\boldsymbol{O}$ en cualquier dirección pero que no es continuo en $\boldsymbol{O}$.

EJEMPLO. Sea $f$ el campo escalar definido en $\mathbf{R}^2$ del modo siguiente:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{si} \quad x \neq 0, \qquad f(0, y) = 0.$$

Sea $\boldsymbol{a} = (0, 0)$ e $\boldsymbol{y} = (a, b)$ cualquier vector. Si $a \neq 0$ y $h \neq 0$ tenemos

$$\frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h} = \frac{f(h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{O})}{h} = \frac{f(ha, hb)}{h} = \frac{ab^2}{a^2 + h^2b^4}.$$

Haciendo que $h \to 0$ encontramos $f'(\boldsymbol{O}; \boldsymbol{y}) = b^2/a$. Si $\boldsymbol{y} = (0, b)$ encontramos, en forma parecida, que $f'(\boldsymbol{O}; \boldsymbol{y}) = 0$. Por consiguiente $f'(\boldsymbol{O}; \boldsymbol{y})$ existe para todas las direcciones $\boldsymbol{y}$. También, $f(\boldsymbol{x}) \to 0$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{O}$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Sin embargo, en cada punto de la parábola $x = y^2$ (excepto en el origen) la función $f$ tiene el valor $\frac{1}{2}$. Puesto que existen tales puntos tan próximos al origen como queramos y que $f(\boldsymbol{O}) = 0$, la función $f$ no es continua en $\boldsymbol{O}$.

El ejemplo anterior prueba que la existencia de *todas* las derivadas direccionales en un punto no implican la continuidad en él. Por esta razón, las derivadas direccionales no constituyen una extensión satisfactoria del concepto unidimensional de derivada. Existe una generalización más conveniente que implica la continuidad y, al propio tiempo, nos permite extender los principales teoremas de la teoría de la derivación en una dimensión al caso de mayor número de dimensiones. Esa es la llamada *diferencial total* o simplemente *diferencial.*

## 8.11 La diferencial

Recordemos que en el caso uni-dimensional una función $f$ que tiene derivada en $a$ puede ser aproximada en un entorno de $a$ mediante un polinomio de

Taylor de primer grado. Si existe $f'(a)$ designemos con $E(a, h)$ la diferencia

$$(8.6) \qquad E(a, h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \qquad \text{si} \quad h \neq 0 .$$

y definamos $E(a, 0) = 0$. De (8.6) obtenemos la fórmula

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + hE(a, h),$$

válida también para $h = 0$. Ésta es la fórmula de Taylor de primer orden para aproximar $f(a+h) - f(a)$ por medio de $f'(a)h$. El error cometido es $hE(a, h)$. De (8.6) resulta que $E(a, h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Por consiguiente el error $hE(a, h)$ es de orden menor que $h$ para valor pequeños de $h$.

Esta propiedad de aproximar una función diferenciable mediante una función lineal sugiere un método de extender el concepto de diferenciabilidad al caso de un número cualquiera de dimensiones.

Sea $f$: $S \to \mathbf{R}$ un campo escalar definido en un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$. Sean $\boldsymbol{a}$ un punto interior a $S$ y $B(\boldsymbol{a}; r)$ una $n$-bola contenida en $S$. Sea $\boldsymbol{v}$ un vector tal que $\|\boldsymbol{v}\| < r$, de modo que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \in B(\boldsymbol{a}; r)$.

DEFINICIÓN DE CAMPO ESCALAR DIFERENCIABLE. *Decimos que $f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ si existe una transformación lineal*

$$T_a\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

*de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$, y una función escalar $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ tal que*

$$(8.7) \qquad f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{a}) + T_a(\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|\, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}),$$

*para $\|\boldsymbol{v}\| < r$ de manera que $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \to 0$ cuando $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$. La transformación lineal $T_a$ se llama diferencial de $f$ en $\boldsymbol{a}$.*

*Observación*: La diferencial $T_a$ es una transformación lineal, no un número. El valor $T_a(\boldsymbol{v})$ es un número real; está definido para todo punto $\boldsymbol{v}$ de $\mathbf{R}^n$. La diferencial fue introducida por W. H. Young en 1908 y por M. Fréchet en 1911 en forma más general.

La ecuación (8.7), válida para $\|\boldsymbol{v}\| < r$, se llama *fórmula de Taylor de primer orden* para $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v})$. Nos proporciona una aproximación lineal, $T_a(\boldsymbol{v})$, para la diferencia $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})$. El error en la aproximación es $\|\boldsymbol{v}\|\, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$, que es de orden más pequeño que $\|\boldsymbol{v}\|$ cuando $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$; esto es, $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = o(\|\boldsymbol{v}\|)$ cuando $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$.

El teorema que sigue demuestra que si la diferencial existe, es única. Asimismo nos dice cómo calcular $T_a(y)$ para todo $y$ de $\mathbf{R}^n$.

TEOREMA 8.5. *Si $f$ es diferenciable en $a$ con diferencial $T_a$, entonces existe la derivada $f'(a; y)$ para todo $y$ de $\mathbf{R}^n$ y tenemos*

$$T_a(y) = f'(a; y). \tag{8.8}$$

*Además, $f'(a; y)$ es una combinación lineal de los componentes de $y$. Efectivamente, si $y = (y_1, \ldots, y_n)$, tenemos*

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(a) y_k. \tag{8.9}$$

*Demostración.* La ecuación (8.8) es trivial si $y = O$ puesto que $T_a(O) = 0$ y $f'(a; O) = 0$. Por consiguiente podemos suponer que $y \neq O$.

Puesto que $f$ es diferenciable en $a$ tenemos una fórmula de Taylor,

$$f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a, v) \tag{8.10}$$

para $\|v\| < r$ para algún $r > 0$, y donde $E(a, v) \to 0$ cuando $\|v\| \to 0$. En esta fórmula tomemos $v = hy$, siendo $h \neq 0$ y $|h| \, \|y\| < r$. Entonces $\|v\| < r$. Puesto que $T_a$ es lineal es $T_a(v) = T_a(hy) = hT_a(y)$. Por lo tanto (8.10) nos da

$$\frac{f(a + hy) - f(a)}{h} = T_a(y) + \frac{|h| \, \|y\|}{h} E(a, v). \tag{8.11}$$

Ya que $\|v\| \to 0$ cuando $h \to 0$ y ya que $|h|/h = \pm 1$, el segundo miembro de (8.11) tiende al límite $T_a(y)$ cuando $h \to 0$. Por consiguiente el primer miembro tiene el mismo límite. Esto demuestra (8.8).

Para deducir (8.9) utilizamos la linealidad de $T_a$. Si $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tenemos $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, luego

$$T_a(y) = T_a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} y_k T_a(e_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k f'(a; e_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k D_k f(a).$$

## 8.12 Gradiente de un campo escalar

La fórmula del teorema 8.5, que expresa $f'(a; y)$ como una combinación lineal de los componentes de $y$, puede escribirse como un producto escalar,

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(a) y_k = \nabla f(a) \cdot y,$$

donde $\nabla f(\boldsymbol{a})$ es el vector cuyos componentes son las derivadas parciales de $f$ en $\boldsymbol{a}$,

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = (D_1 f(\boldsymbol{a}), \ldots, D_n f(\boldsymbol{a})).$$

Éste es el llamado *gradiente* de $f$. El gradiente $\nabla f$ es un campo vectorial definido en cada punto $\boldsymbol{a}$ en el que existen las derivadas parciales $D_1 f(\boldsymbol{a}), \ldots, D_n f(\boldsymbol{a})$. También empleamos la notación grad $f$ en lugar de $\nabla f$. El símbolo $\nabla$ se lee «nabla».

La fórmula de Taylor de primer orden (8.10) puede ahora escribirse en la forma

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\| E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}), \tag{8.12}$$

en donde $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \to 0$ cuando $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$. En esta forma se parece a la fórmula de Taylor unidimensional desempeñando el vector gradiente $\nabla f(\boldsymbol{a})$ el papel de la derivada $f'(a)$.

A partir de la fórmula de Taylor podemos deducir fácilmente que la diferenciabilidad implica la continuidad.

TEOREMA 8.6. *Si un campo escalar $f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, entonces $f$ es continua en $\boldsymbol{a}$.*

*Demostración.* De (8.12) resulta

$$|f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})| = |\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\| E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})|.$$

Aplicando la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz encontramos

$$0 \leq |f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})| \leq \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\| |E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})|.$$

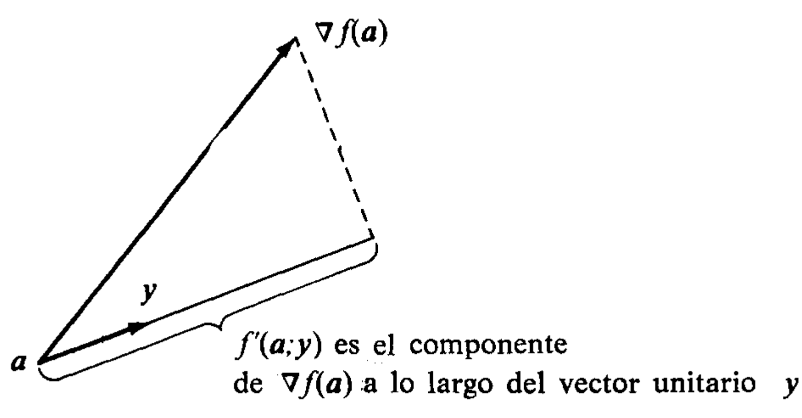



FIGURA 8.5 *Relación geométrica de la derivada direccional con el vector gradiente.*

Esto demuestra que $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) \to f(\boldsymbol{a})$ cuando $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$, así que $f$ es continua en $\boldsymbol{a}$.

Cuando $\boldsymbol{y}$ es un vector *unitario* la derivada direccional $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ tiene una sencilla relación geométrica con el vector gradiente. Supongamos que $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{O}$ y designemos con $\theta$ el ángulo formado por $\nabla f(\boldsymbol{a})$ e $\boldsymbol{y}$. Tenemos entonces

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos \theta = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cos \theta .$$

Esto nos dice que la derivada direccional es el componente del vector gradiente en la dirección del $\boldsymbol{y}$. La figura 8.5 muestra los vectores $\nabla f(\boldsymbol{a})$ e $\boldsymbol{y}$ aplicados al punto $\boldsymbol{a}$. La derivada alcanza el valor máximo cuando $\cos \theta = 1$, esto es, cuando $\boldsymbol{y}$ tiene la misma dirección que $\nabla f(\boldsymbol{a})$. Además, este máximo es igual a la longitud del vector gradiente. Cuando $\nabla f(\boldsymbol{a})$ es ortogonal a $\boldsymbol{y}$, la derivada direccional $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ es 0. En el espacio de dos dimensiones se escribe con frecuencia

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \boldsymbol{j} .$$

En tres dimensiones la fórmula correspondiente es

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \boldsymbol{k} .$$

## 8.13 Condición suficiente de diferenciabilidad

Si $f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, existen todas las derivadas parciales $D_1 f(\boldsymbol{a}), \ldots, D_n f(\boldsymbol{a})$. No obstante, la existencia de todas esas derivadas no implica necesariamente que $f$ sea diferenciable en $\boldsymbol{a}$. La siguiente función proporciona un contraejemplo

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{si} \quad x \neq 0, \qquad f(0, y) = 0,$$

que ya se discutió en la sección 8.10. Para esa función existen las dos derivadas parciales $D_1 f(\boldsymbol{O})$ y $D_2 f(\boldsymbol{O})$ pero $f$ no es continua en $\boldsymbol{O}$, y por tanto no puede ser diferenciable en $\boldsymbol{O}$.

El teorema que sigue demuestra que la existencia de derivadas parciales *continuas* en un punto implica la diferenciabilidad en dicho punto.

TEOREMA 8.7. CONDICIÓN SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDAD. *Si existen las derivadas parciales $D_1 f, \ldots, D_n f$ en una cierta n-bola $B(\boldsymbol{a})$ y son continuas en $\boldsymbol{a}$, entonces $f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$.*

*Observación*: Un campo escalar que satisfaga las hipótesis 8.7 se le llama *diferenciable con continuidad* en $\boldsymbol{a}$.

*Demostración.* $T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v})$ sólo puede ser $\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$ . Queremos demostrar que

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\| \, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}),$$

donde $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \to 0$ cuando $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$. Esto probará el teorema.

Pongamos $\lambda = \|\boldsymbol{v}\|$. Entonces $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u}$, donde $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. Mantengamos $\lambda$ lo bastante pequeño para que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}$ esté en la bola $B(\boldsymbol{a})$ en la que existen las derivadas parciales $D_1 f, \ldots, D_n f$. Expresando $\boldsymbol{u}$ en función de sus componentes tenemos

$$\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + u_n \boldsymbol{e}_n,$$

donde $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ son los vectores coordenados unitarios. Escribamos ahora la diferencia $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})$ en forma de suma telescópica,

$$(8.13) \qquad f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} \{ f(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{v}_k) - f(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{v}_{k-1}) \},$$

en la que $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ son vectores cualesquiera de $\mathbf{R}^n$ tales que $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{u}$. Elijamos esos vectores de modo que satisfagan la relación de recurrencia $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{k-1} + u_k \boldsymbol{e}_k$. Esto es, tomemos

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{O}, \qquad \boldsymbol{v}_1 = u_1 \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{v}_2 = u_1 \boldsymbol{e}_1 + u_2 \boldsymbol{e}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{v}_n = u_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + u_n \boldsymbol{e}_n.$$

Entonces el $k$-ésimo término de la suma (8.13) se transforma en

$$f(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{v}_{k-1} + \lambda u_k \boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{v}_{k-1}) = f(\boldsymbol{b}_k + \lambda u_k \boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{b}_k),$$

donde $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{v}_{k-1}$. Los dos puntos $\boldsymbol{b}_k$ y $\boldsymbol{b}_k + \lambda u_k \boldsymbol{e}_k$ tan sólo difieren en su $k$-ésimo componente. Por consiguiente podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial y escribir

$$(8.14) \qquad f(\boldsymbol{b}_k + \lambda u_k \boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{b}_k) = \lambda u_k \, D_k f(\boldsymbol{c}_k),$$

perteneciendo $\boldsymbol{c}_k$ al segmento de recta que une $\boldsymbol{b}_k$ a $\boldsymbol{b}_k + \lambda u_k \boldsymbol{e}_k$. Obsérvese que $\boldsymbol{b}_k \to \boldsymbol{a}$ y por tanto $\boldsymbol{c}_k \to \boldsymbol{a}$ cuando $\lambda \to 0$.

Aplicando (8.14) en (8.13) obtenemos

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} D_k f(\boldsymbol{c}_k) u_k.$$

Pero $\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \sum_{k=1}^{n} D_k f(\boldsymbol{a}) u_k$, así que

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \sum_{k=1}^{n} \{D_k f(\boldsymbol{c}_k) - D_k f(\boldsymbol{a})\} u_k = \|\boldsymbol{v}\| \, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}),$$

donde

$$E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^{n} \{D_k f(\boldsymbol{c}_k) - D_k f(\boldsymbol{a})\} u_k .$$

Puesto que $\boldsymbol{c}_k \to \boldsymbol{a}$ cuando $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$, y puesto que cada derivada parcial $D_k f$ es continua en $\boldsymbol{a}$, vemos que $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \to 0$ cuando $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$. Esto completa la demostración.

## 8.14 Ejercicios

1. Hallar el vector gradiente en cada punto en el que exista para los campos escalares definidos por las ecuaciones siguientes:
   a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$.
   b) $f(x, y) = e^x \cos y$.
   c) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$.
   d) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$.
   e) $f(x, y, z) = \log(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$.
   f) $f(x, y, z) = x^{y^z}$.
2. Calcular las derivadas direccionales de los siguientes campos escalares en los puntos y direcciones que se indican:
   a) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en $(1, 1, 0)$ en la dirección de $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.
   b) $f(x, y, z) = (x/y)^z$ en $(1, 1, 1)$ en la dirección de $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.
3. Hallar los puntos $(x, y)$ y las direcciones para las que la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ tiene el valor máximo, si $(x, y)$ está en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.
4. Un campo escalar diferenciable $f$ tiene, en el punto $(1, 2)$ las derivadas direccionales $+2$ en dirección al punto $(2, 2)$ y $-2$ en dirección al punto $(1, 1)$. Determinar el vector gradiente en $(1, 2)$ y calcular la derivada direccional en dirección al punto $(4,6)$.
5. Hallar los valores de las constantes $a$, $b$ y $c$ tales que la derivada direccional de $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1, 2, -1)$ tenga el valor máximo 64 en la dirección paralela al eje $z$.
6. Dado un campo escalar diferenciable en un punto $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{R}^2$. Supongamos que $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = 1$ y $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{z}) = 2$, siendo $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. Hacer un gráfico mostrando el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ para los que $f'(\boldsymbol{a}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 6$. Calcular también el gradiente $\nabla f(\boldsymbol{a})$.
7. Sean $f$ y $g$ dos campos escalares diferenciables en un conjunto abierto $S$. Deducir las siguientes propiedades del gradiente:
   a) $\operatorname{grad} f = \boldsymbol{O}$ si $f$ es constante en $S$.
   b) $\operatorname{grad}(f + g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$.
   c) $\operatorname{grad}(cf) = c \operatorname{grad} f$ si $c$ es constante.
   d) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.
   e) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2}$ en los puntos en los que $g \neq 0$.
8. En $\mathbf{R}^3$ consideremos $\boldsymbol{r}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, y sea $r(x, y, z) = \|\boldsymbol{r}(x, y, z)\|$.

a) Demostrar que $\nabla r(x, y, z)$ es un vector unidad en la dirección de $\boldsymbol{r}(x, y, z)$.
b) Demostrar que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$ si $n$ es un entero positivo.
[*Indicación:* Utilizar el ejercicio 7 d).]
c) ¿Es válida la fórmula del apartado b) cuando $n$ es entero negativo o cero?
d) Hallar un campo escalar $f$ tal que $\nabla f = \boldsymbol{r}$.

9. Supongamos que $f$ es diferenciable en cada punto de una $n$-bola $B(\boldsymbol{a})$. Si $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = 0$ para n vectores independientes $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ y para todo $\boldsymbol{x}$ en $B(\boldsymbol{a})$, demostrar que $f$ es constante en $B(\boldsymbol{a})$.
10. Supongamos que $f$ es diferenciable en cada punto de una $n$-bola $B(\boldsymbol{a})$.
a) Si $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{O}$ para todo $\boldsymbol{x}$ de $B(\boldsymbol{a})$, demostrar que $f$ es constante en $B(\boldsymbol{a})$.
b) Si $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ para todo $\boldsymbol{x}$ de $B(\boldsymbol{a})$, demostrar que $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$.
11. Considerar las seis proposiciones que siguen relativas a un campo escalar $f: S \to \mathbf{R}$, siendo $S \subseteq \mathbf{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto interior a $S$.
a) $f$ es continuo en $\boldsymbol{a}$.
b) $f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$.
c) $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ existe para todo $\boldsymbol{y}$ de $\mathbf{R}^n$.
d) Existen todas las derivadas parciales de $f$ en un entorno de $\boldsymbol{a}$ y son continuas en $\boldsymbol{a}$.
e) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$.
f) $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ para todo $\boldsymbol{x}$ de $\mathbf{R}^n$.

En una tabla parecida a la indicada aquí, marcar con una T el cuadrado correspondiente si la proposición de la fila (x) implica siempre la proposición de la columna (y). Por ejemplo, si (a) implica siempre (b), poner T en el segundo cuadrado de la primera fila. La diagonal principal ha sido ya marcada.

| | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | T | | | | | |
| b | | T | | | | |
| c | | | T | | | |
| d | | | | T | | |
| e | | | | | T | |
| f | | | | | | T |

## 8.15 Regla de la cadena para derivadas de campos escalares

En la teoría de la derivación en una dimensión, la regla de la cadena nos permite calcular la derivada de una función compuesta $g(t) = f[r(t)]$ mediante la fórmula

$$g'(t) = f'[r(t)] \cdot r'(t).$$

Esta sección nos proporciona una extensión de la fórmula cuando $f$ se reemplaza por un campo escalar definido en un conjunto del espacio de dimensión $n$, y $\boldsymbol{r}$ por una función vectorial de una variable real cuyos valores están en el dominio de $f$.

Más adelante extenderemos aún más la fórmula para incluir el caso en el que $f$ y $r$ son ambas campos vectoriales.

Resulta fácil imaginarse casos en los que puede presentarse la composición de un campo escalar y un campo vectorial. Por ejemplo, supongamos que $f(\boldsymbol{x})$ mide la temperatura en un punto $\boldsymbol{x}$ de un sólido tri-dimensional, y supongamos que queremos conocer cómo cambia la temperatura cuando el punto $\boldsymbol{x}$ se mueve a lo largo de una curva $C$ situada en el sólido. Si la curva es descrita por una función vectorial $\boldsymbol{r}$ definida en un intervalo $[a, b]$, podemos introducir una nueva función $g$ mediante la fórmula

$$g(t) = f[\boldsymbol{r}(t)] \qquad \text{si} \quad a \leq t \leq b.$$

Esta función compuesta $g$ expresa la temperatura como función del parámetro $t$, y su derivada $g'(t)$ mide la variación de la temperatura a lo largo de la curva. La siguiente extensión de la regla de la cadena nos permite calcular la derivada $g'(t)$ sin determinar $g(t)$ explícitamente.

TEOREMA 8.8. REGLA DE LA CADENA. *Sea $f$ un campo escalar definido en en un conjunto abierto $S$ de $\mathbf{R}^n$, y sea $\boldsymbol{r}$ una función vectorial que aplica un intervalo $J$ de $\mathbf{R}^1$ en $S$. Definamos la función compuesta $g = f \circ \boldsymbol{r}$ en $J$ mediante la ecuación*

$$g(t) = f[\boldsymbol{r}(t)] \qquad \text{si} \quad t \in J.$$

*Sea $t$ un punto de $J$ en el que $\boldsymbol{r}'(t)$ existe y supongamos que $f$ es diferenciable en $\boldsymbol{r}(t)$. Existe entonces $g'(t)$ y es igual al producto escalar*

$$g'(t) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{r}'(t), \qquad \text{donde} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}(t). \tag{8.15}$$

*Demostración.* Pongamos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}(t)$, siendo $t$ un punto de $J$ en el que $\boldsymbol{r}'(t)$ exista. Puesto que $S$ es abierto existe una $n$-bola $B(\boldsymbol{a})$ situada en $S$. Tomemos $h \neq 0$ lo bastante pequeño para que $\boldsymbol{r}(t + h)$ esté situada en $B(\boldsymbol{a})$, y pongamos $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}(t + h) - \boldsymbol{r}(t)$. Obsérvese que $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{O}$ cuando $h \to 0$. Tenemos ahora

$$g(t + h) - g(t) = f[\boldsymbol{r}(t + h)] - f[\boldsymbol{r}(t)] = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}).$$

Aplicando la fórmula de Taylor de primer orden a $f$ tenemos

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\| \, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}),$$

donde $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) \to 0$ cuando $\|\boldsymbol{y}\| \to 0$. Ya que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}(t + h) - \boldsymbol{r}(t)$ esto nos da

$$\frac{g(t + h) - g(t)}{h} = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\boldsymbol{r}(t + h) - \boldsymbol{r}(t)}{h} + \frac{\|\boldsymbol{r}(t + h) - \boldsymbol{r}(t)\|}{h} E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}).$$

Haciendo que $h \to 0$ obtenemos (8.15).

EJEMPLO 1. *Derivada direccional a lo largo de una curva.* Cuando la función $\boldsymbol{r}$ describe una curva $C$, la derivada $\boldsymbol{r}'$ es el vector velocidad (tangente a la curva) y la derivada $g'$ de la ecuación (8.15) es la derivada de $f$ respecto al vector velocidad, suponiendo que $\boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{O}$. Si $\boldsymbol{T}(t)$ es un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{r}'(t)$ ($\boldsymbol{T}$ es el vector tangente unitario), el producto escalar $\nabla f[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \boldsymbol{T}(t)$ se llama *derivada direccional de $f$ a lo largo de la curva $C$* o *en la dirección de $C$.* Para una curva plana podemos escribir

$$\boldsymbol{T}(t) = \cos \alpha(t)\, \boldsymbol{i} + \cos \beta(t)\, \boldsymbol{j},$$

siendo $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ los ángulos formados por el vector $\boldsymbol{T}(t)$ y los ejes $x$ e $y$ positivos; la derivada direccional de $f$ a lo largo de $C$ es en este caso

$$\nabla f[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \boldsymbol{T}(t) = D_1 f[\boldsymbol{r}(t)] \cos \alpha(t) + D_2 f[\boldsymbol{r}(t)] \cos \beta(t).$$

Con frecuencia esta fórmula se escribe más simplemente así:

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{T} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta.$$

Algunos autores expresan la derivada direccional $\nabla f \cdot \boldsymbol{T}$ con el símbolo $df/ds$. Puesto que la derivada direccional a lo largo de $C$ está definida en función de $\boldsymbol{T}$, su valor depende de la representación paramétrica elegida para $C$. Un cambio de la representación podría invertir la dirección de $\boldsymbol{T}$; lo que, a su vez, invertirá el signo de la derivada direccional.

EJEMPLO 2. Hallar la derivada direccional del campo escalar $f(x, y) = x^2 - 3xy$ a lo largo de la parábola $y = x^2 - x + 2$ en el punto $(1, 2)$.

*Solución.* En un punto cualquiera $(x, y)$ el vector gradiente es

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = (2x - 3y)\boldsymbol{i} - 3x\boldsymbol{j}.$$

En el punto $(1, 2)$ tenemos $\nabla f(1, 2) = -4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$. La parábola puede representarse paramétricamente mediante la ecuación vectorial $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (t^2 - t + 2)\boldsymbol{j}$. Por lo tanto, $\boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{i} + (2t - 1)\boldsymbol{j}$, y $\boldsymbol{r}'(1) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. Para esta representación de $C$ el vector unitario tangente $\boldsymbol{T}(1)$ es $(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$ y la derivada direccional pedida es $\nabla f(1,2) \cdot \boldsymbol{T}(1) = -7/\sqrt{2}$.

EJEMPLO 3. Sean $f$ un campo escalar no constante, diferenciable en todo el plano, y $c$ una constante. Supongamos que la ecuación cartesiana $f(x, y) = c$ describa una curva $C$ que tenga tangente en cada uno de sus puntos. Demostrar que $f$ tiene las siguientes propiedades en cada punto de $C$:

a) El vector gradiente $\nabla f$ es normal a $C$.
b) La derivada direccional de $f$ es cero a lo largo de $C$.
c) La derivada direccional de $f$ tiene su valor máximo en la dirección normal a $C$.

*Solución.* Si $\boldsymbol{T}$ es un vector unitario tangente a $C$, la derivada direccional de $f$ a lo largo de $C$ es el producto escalar $\nabla f \cdot \boldsymbol{T}$. Este producto es cero si $\nabla f$ es perpendicular a $\boldsymbol{T}$, y alcanza su máximo valor si $\nabla f$ es paralela a $\boldsymbol{T}$. Por consiguiente las dos proposiciones b) y c) son consecuencias de a). Para demostrar a), consideremos una curva plana cualquiera $\Gamma$ con una ecuación vectorial de la forma $\boldsymbol{r}(t) = X(t)\boldsymbol{i} + Y(t)\boldsymbol{j}$ e introduzcamos la función $g(t) = f[\boldsymbol{r}(t)]$. En virtud de la regla de la cadena tenemos $g'(t) = \nabla f[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \boldsymbol{r}'(t)$. Cuando $\Gamma = C$, la función $g$ tiene el valor constante $c$ así que $g'(t) = 0$ si $\boldsymbol{r}(t) \in C$. Puesto que $g' = \nabla f \cdot \boldsymbol{r}'$, resulta que $\nabla f$ es perpendicular a $\boldsymbol{r}'$ en $C$; luego $\nabla f$ es normal a $C$.

## 8.16 Aplicaciones geométricas. Conjuntos de nivel. Planos tangentes

La regla de la cadena puede utilizarse para deducir propiedades geométricas

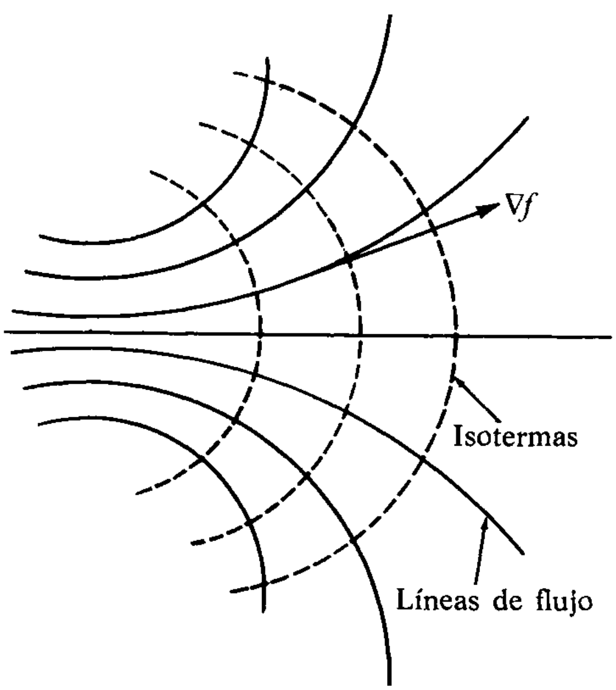



FIGURA 8.6 *Las curvas de trazos son isotermas: $f(x, y) = c$. El vector gradiente $\nabla f$ indica la dirección de las líneas de fuerza.*

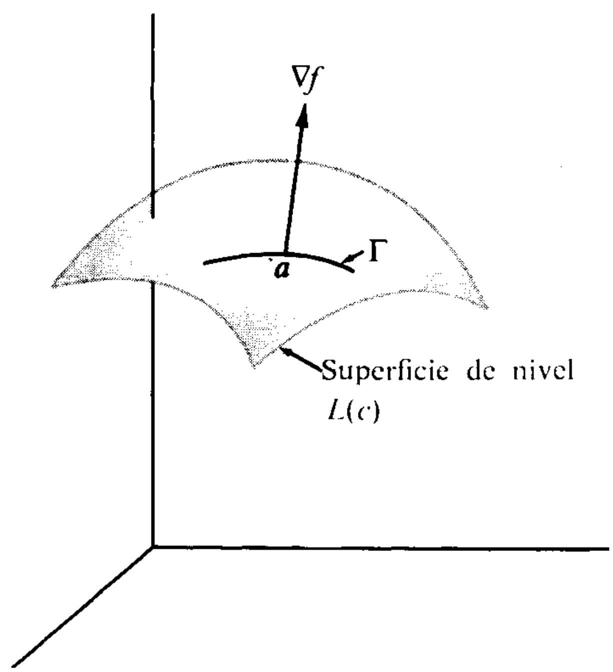



FIGURA 8.7 *El vector gradiente $\nabla f$ es normal a cada curva $\Gamma$ situada en la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$.*

del vector gradiente. Sea $f$ un campo escalar definido en un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$ y consideremos aquellos puntos $x$ de $S$ para los que $f(x)$ tiene un valor constante, por ejemplo $f(x) = c$. Designemos ese conjunto por $L(c)$, de modo que

$$L(c) = \{x \mid x \in S \ \text{ y } \ f(x) = c\}.$$

El conjunto $L(c)$ se llama *conjunto de nivel* de $f$. En $\mathbf{R}^2$, $L(c)$ se llama *curva de nivel*; en $\mathbf{R}^3$ *superficie de nivel.*

En muchas aplicaciones físicas se presentan familias de curvas de nivel. Por ejemplo, si $f(x, y)$ representa la temperatura en $(x, y)$, las curvas de nivel de $f$ (curvas de temperatura constante) se llaman *isotermas.* El flujo de calor tiene lugar en la dirección del cambio más rápido de la temperatura. Luego, en una hoja plana delgada el flujo de calor tiene lugar a lo largo de una familia de curvas ortogonales a las isotermas. Esas se llaman *líneas de flujo;* son las trayectorias ortogonales de las isotermas. Véase la figura 8.6.

Consideremos ahora un campo escalar $f$ diferenciable en un conjunto abierto $S$ de $\mathbf{R}^3$, y examinemos una de sus superficies de nivel, $L(c)$. Sea $a$ un punto en esa superficie, y consideremos una curva $\Gamma$ situada en la superficie y que pase por $a$, como está indicado en la figura 8.7. Demostraremos que el vector gradiente

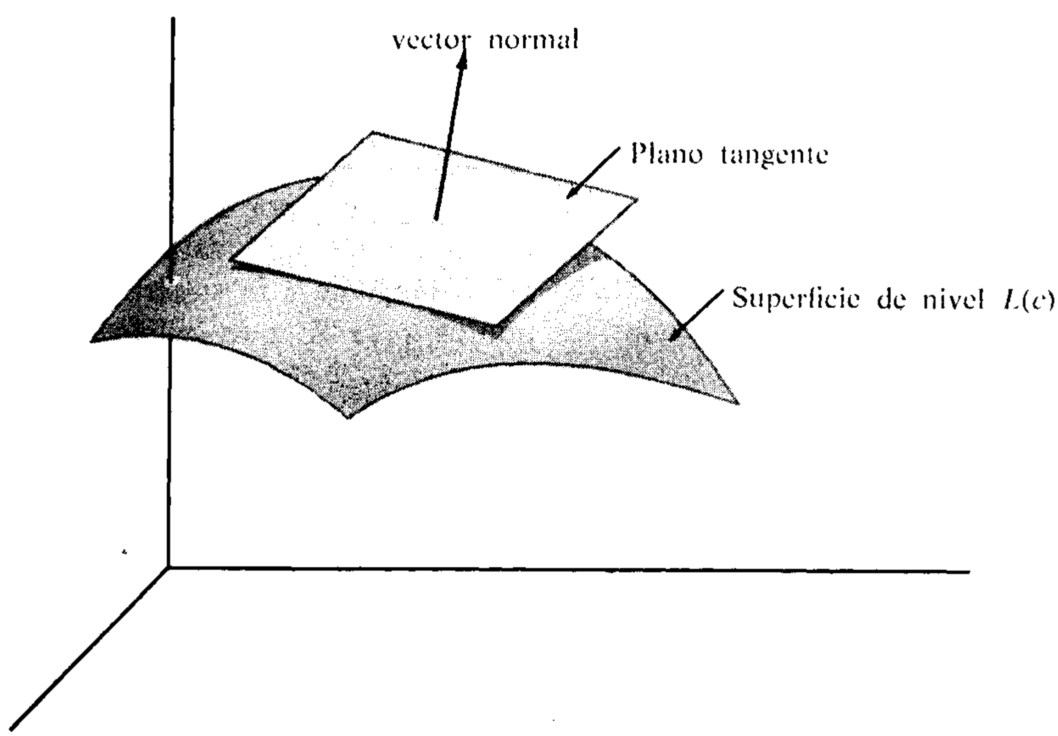



FIGURA 8.8 *El vector gradiente $\nabla f$ es normal al plano tangente a una superficie de nivel $f(x, y, z) = c$.*

$\nabla f(\boldsymbol{a})$ es normal a esa curva en $\boldsymbol{a}$. Esto es, demostraremos que $\nabla f(\boldsymbol{a})$ es perpendicular al vector tangente de $\Gamma$ en $\boldsymbol{a}$. A tal fin supongamos que $\Gamma$ está definida paramétricamente por una función vectorial derivable $\boldsymbol{r}$ definida en un cierto intervalo $J$ de $\mathbf{R}^1$. Puesto que $\Gamma$ está situada en la superficie de nivel $L(c)$, la función $\boldsymbol{r}$ satisface la ecuación

$$f[\boldsymbol{r}(t)] = c \text{ para todo } t \text{ de } J.$$

Si $g(t) = f[\boldsymbol{r}(t)]$ para $t$ en $J$, la regla de la cadena establece que

$$g'(t) = \nabla f[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \boldsymbol{r}'(t).$$

Puesto que $g$ es constante en $J$, tenemos $g'(t) = 0$ en $J$. En particular, eligiendo $t_1$ de modo que $g(t_1) = \boldsymbol{a}$ encontramos que

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{r}'(t_1) = 0.$$

Es decir, el gradiente de $f$ en $\boldsymbol{a}$ es perpendicular al vector tangente $\boldsymbol{r}'(t_1)$ como se afirmó.

Tomemos ahora una familia de curvas en la superficie de nivel $L(c)$ que pasen por el punto $\boldsymbol{a}$. Según lo dicho en la discusión anterior, los vectores tangentes a todas esas curvas son perpendiculares al vector gradiente $\nabla f(\boldsymbol{a})$ . Si éste no es cero, dichos vectores tangentes determinan un plano, y el gradiente $\nabla f(\boldsymbol{a})$ es normal a este plano. (Véase figura 8.8.) Tal plano se llama *plano tangente* a la superficie $L(c)$ en $\boldsymbol{a}$.

En el Volumen I se vio que un plano que pase por $\boldsymbol{a}$ con vector normal $\boldsymbol{N}$ está constituido por todos los puntos $\boldsymbol{x}$ de $\mathbf{R}^3$ que satisfacen la ecuación $\boldsymbol{N} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$. Por consiguiente el plano tangente a la superficie de nivel $L(c)$ en $\boldsymbol{a}$ estará constituido por todos los puntos $\boldsymbol{x}$ de $\mathbf{R}^3$ que satisfagan

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0.$$

Para obtener una ecuación cartesiana de ese plano expresaremos $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$, y $\nabla f(\boldsymbol{a})$ en función de sus componentes. Escribiendo $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, y

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = D_1 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{i} + D_2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{j} + D_3 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{k},$$

obtenemos la ecuación cartesiana

$$D_1 f(\boldsymbol{a})(x - x_1) + D_2 f(\boldsymbol{a})(y - y_1) + D_3 f(\boldsymbol{a})(z - z_1) = 0.$$

A los campos escalares definidos en $\mathbf{R}^2$ se aplica una discusión parecida. En el ejemplo 3 de la sección anterior hemos demostrado que el vector gradiente $\nabla f(\boldsymbol{a})$ en un punto $\boldsymbol{a}$ de una curva de nivel es perpendicular al vector tangente a la curva en $\boldsymbol{a}$. Por consiguiente la recta tangente a la curva de nivel $L(c)$ en un punto $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ tiene la ecuación cartesiana

$$D_1 f(\boldsymbol{a})(x - x_1) + D_2 f(\boldsymbol{a})(y - y_1) = 0 .$$

## 8.17 Ejercicios

1. En este ejercicio podemos suponer la existencia y continuidad de todas las derivadas que se consideren. Las ecuaciones $u = f(x,y)$, $x = X(t)$, $y = Y(t)$ definen $u$ como función de $t$, pongamos $u = F(t)$.
   a) Aplicar la regla de la cadena para demostrar que
   $$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} Y'(t),$$
   donde $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se han calculado en $[X(t), Y(t)]$.
   b) En forma parecida, expresar la derivada segunda $F''(t)$ en función de las derivadas de $f$, $X$ e $Y$. Recuérdese que las derivadas parciales de la fórmula del apartado a) son funciones compuestas dadas por
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f[X(t), Y(t)], \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f[X(t), Y(t)].$$

2. Teniendo en cuenta el ejercicio 1 calcular $F'(t)$ y $F''(t)$ en función de $t$ en cada uno de los siguientes casos particulares:
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $X(t) = t$, $Y(t) = t^2$.
   b) $f(x,y) = e^{xy} \cos(xy^2)$, $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \operatorname{sen} t$.
   c) $f(x,y) = \log[(1 + e^{x^2})/(1 + e^{y^2})]$, $X(t) = e$, $Y(t)^t = e^{-t}$.

3. Calcular en cada caso la derivada direccional de $f$ en los puntos y direcciones que se indican:
   a) $f(x,y,z) = 3x - 5y + 2z$ en $(2,2,1)$ en la dirección de la normal exterior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
   b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en la dirección de la normal exterior en dicho punto.
   c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ en $(3,4,5)$ a lo largo de la curva de intersección de las dos superficies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$.

4. a) Hallar un vector $V(x,y,z)$ normal a la superficie
   $$z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$$

en un punto cualquiera $(x, y, z)$ de la superficie $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

b) Hallar el coseno del ángulo $\theta$ formado por el vector $V(x, y, z)$ y el eje $z$ y determinar el límite de $\cos\theta$ cuando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.

5. Las dos ecuaciones $e^u \cos v = x$ y $e^u \operatorname{sen} v = y$ definen $u$ y $v$ como funciones de $x$ e $y$, sean éstas $u = U(x, y)$ y $v = V(x, y)$. Hallar fórmulas explícitas para $U(x, y)$ y $V(x, y)$, válidas para $x > 0$, y demostrar que los vectores gradientes $\nabla U(x, y)$ y $\nabla V(x, y)$ son perpendiculares en cada punto $(x, y)$.
6. Sea $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.
   a) Comprobar que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son cero ambas en el origen.
   b) ¿Tiene la superficie $z = f(x, y)$ plano tangente en el origen? [*Indicación*: Considérese la sección producida en la superficie por el plano $x = y$.]
7. Si $(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de la superficie $z = xy$, las dos rectas $z = y_0 x$, $y = y_0$ y $z = x_0 y$, $x = x_0$ se cortan en $(x_0, y_0, z_0)$ y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto $(x_0, y_0, z_0)$ contiene a esas dos rectas.
8. Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie $xyz = a^3$ en un punto genérico $(x_0, y_0, z_0)$. Demostrar que el volumen del tetraedro limitado por ese plano y los tres planos coordenados es $9a^3/2$.
9. Hallar un par de ecuaciones cartesianas para la recta que es tangente a las dos superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1, 1, 1)$.
10. Hallar una constante $c$ tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas
$$(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3 \qquad \text{y} \qquad x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$
los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno al otro.
11. Si $r_1$ y $r_2$ son las distancias desde un punto $(x, y)$ de una elipse a sus focos, demostrar que la ecuación $r_1 + r_2 =$ constante (que satisfacen esas distancias) implica la relación
$$\boldsymbol{T} \cdot \nabla(r_1 + r_2) = 0,$$
siendo $\boldsymbol{T}$ el vector unitario tangente a la curva. Interpretar geométricamente ese resultado, y con ello demostrar que la tangente forma ángulos iguales con las rectas que unen $(x, y)$ a los focos.
12. Si $\nabla f(x, y, z)$ es siempre paralela a $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, demostrar que $f$ debe tomar valores iguales en los puntos $(0, 0, a)$ y $(0, 0, -a)$.

## 8.18 Diferenciales de campos vectoriales

La teoría de la diferenciación para campos vectoriales es una extensión directa de la teoría análoga para campos escalares. Sea $f: S \to \mathbf{R}^m$ un campo vectorial definido en un subconjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$. Si $\boldsymbol{a}$ es un punto interior de $S$ e $\boldsymbol{y}$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^n$ definimos la derivada $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ mediante la fórmula
$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h},$$
siempre que tal límite exista. La derivada $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ es un vector de $\mathbf{R}^m$.

Designemos con $f_k$ el $k$-ésimo componente de $f$. Observemos que la derivada $f'(a; y)$ existe si y sólo si $f'_k(a; y)$ existe para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, en cuyo caso tenemos

$$f'(a; y) = (f'_1(a; y), \ldots, f'_m(a; y)) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(a; y)e_k,$$

donde $e_k$ es el $k$-ésimo vector coordenado unidad.

Decimos que $f$ es *diferenciable* en un punto interior $a$ si existe una transformación lineal

$$T_a: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

tal que

$$f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| \, E(a, v), \tag{8.16}$$

donde $E(a, v) \to O$ cuando $v \to O$. La fórmula de Taylor de primer orden (8.16) es válida para todo $v$ tal que $\|v\| < r$ para un cierto $r > 0$. El término $E(a, v)$ es un vector de $\mathbf{R}^m$. La transformación lineal $T_a$ se llama *diferencial total* o simplemente *diferencial* de $f$ en $a$.

Para los campos escalares se demostró que $T_a(y)$ es el producto escalar del vector gradiente $\nabla f(a)$ por $y$. Para los campos vectoriales demostraremos que $T_a(y)$ es un vector cuyo componente $k$-ésimo es el producto escalar $\nabla f_k(a) \cdot y$.

TEOREMA 8.9. *Supongamos que $f$ es diferenciable en $a$ con diferencial $T_a$. Existe entonces la derivada $f'(a; y)$ para todo $a$ de $\mathbf{R}^n$, y tenemos*

$$T_a(y) = f'(a; y). \tag{8.17}$$

*Además, si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y si $y = (y_1, \ldots, y_n)$, tenemos*

$$T_a(y) = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot y \, e_k = (\nabla f_1(a) \cdot y, \ldots, \nabla f_m(a) \cdot y). \tag{8.18}$$

*Demostración.* Razonemos como en el caso escalar. Si $y = O$, entonces $f'(a; y) = O$ y $T_a(O) = O$. Por consiguiente podemos suponer que $y \neq O$. Tomando $v = hy$ en la fórmula de Taylor (8.16) tenemos

$$f(a + hy) - f(a) = T_a(hy) + \|hy\| \, E(a, v) = hT_a(y) + |h| \, \|y\| \, E(a, v).$$

Dividiendo por $h$ y haciendo que $h \to 0$ obtenemos (8.17).

Para demostrar (8.18) basta observar que

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(a; y) \, e_k = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot y \, e_k.$$

La ecuación (8.18) puede también escribirse en forma más sencilla como un producto matricial,

$$T_a(y) = Df(a)y,$$

siendo $Df(a)$ la matriz $m \times n$ cuya fila $k$-ésima es $\nabla f_k(a)$, e $y$ una matriz columna $n \times 1$. La matriz $Df(a)$ se llama *matriz jacobiana* de $f$ en $a$. Su elemento $kj$ es la derivada parcial $D_j f_k(a)$. Así pues, tenemos

$$Df(a) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

La matriz jacobiana $Df(a)$ está definida en cada punto en el que existan las $mn$ derivadas parciales $D_j f_k(a)$.

La diferencial $T_a$ se expresa también poniendo $f'(a)$. La derivada $f'(a)$ es una transformación lineal; la matriz jacobiana $Df(a)$ es una representación matricial de esa transformación.

La fórmula de Taylor de primer orden toma la forma

$$f(a + v) = f(a) + f'(a)(v) + \|v\| E(a, v), \tag{8.19}$$

donde $E(a, v) \to O$ cuando $v \to O$. Se parece a la fórmula de Taylor unidimensional. Para calcular los componentes del vector $f'(a)(v)$ podemos utilizar el producto matricial $Df(a)v$ o la fórmula (8.18) del teorema 8.9.

## 8.19 La diferenciabilidad implica la continuidad

TEOREMA 8.10. *Si un campo vectorial $f$ es diferenciable en $a$, entonces $f$ es continuo en $a$.*

*Demostración.* Como en el caso escalar, aplicamos la fórmula de Taylor para demostrar este teorema. Si hacemos que $v \to O$ en (8.19) el error $\|v\| E(a, v) \to O$. La parte lineal $f'(a)(v)$ tiende también a $O$ debido a que las transformaciones lineales son continuas en $O$. Esto completa la demostración.

Al llegar aquí conviene deducir una desigualdad que se utilizará en la demostración de la regla de la cadena en la próxima sección. La desigualdad se refiere a un campo vectorial $f$ diferenciable en $a$; ella establece que

$$\|f'(a)(v)\| \leq M_f(a)\,\|v\|, \qquad \text{donde} \quad M_f(a) = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(a)\|. \tag{8.20}$$

Para demostrarla utilizamos la ecuación (8.18) junto a la desigualdad triangular de Cauchy-Schwarz obteniendo

$$\|f'(a)(v)\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot v\, e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{m} |\nabla f_k(a) \cdot v| \leq \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(a)\|\, \|v\|.$$

## 8.20 La regla de la cadena para diferenciales de campos vectoriales

TEOREMA 8.11. REGLA DE LA CADENA. *Sean $f$ y $g$ dos campos vectoriales tales que la función compuesta $h = f \circ g$ esté definida en un entorno del punto $a$. Supongamos que $g$ sea diferenciable en $a$, con diferencial $g'(a)$. Pongamos $b = g(a)$ y supongamos que $f$ es diferenciable en $b$, con diferencial $f'(b)$. Entonces $h$ es diferenciable en $a$, y la diferencial $h'(a)$ viene dada por*

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a),$$

*que es la composición de las transformaciones lineales $f'(b)$ y $g'(a)$.*

*Demostración.* Consideremos la diferencia $h(a + y) - h(a)$ para valores pequeños de $\|y\|$, y demostremos que se obtiene una fórmula de Taylor de primer orden. De la definición de $h$ resulta

$$h(a + y) - h(a) = f[g(a + y)] - f[g(a)] = f(b + v) - f(b), \tag{8.21}$$

siendo $v = g(a + y) - g(a)$. La fórmula de Taylor aplicada a $g(a + y)$ nos da

$$v = g'(a)(y) + \|y\|\, E_g(a, y), \qquad \text{donde} \quad E_g(a, y) \to O \text{ cuando } y \to O. \tag{8.22}$$

La fórmula de Taylor relativa a $f(b + v)$ nos da

$$f(b + v) - f(b) = f'(b)(v) + \|v\|\, E_f(b, v), \tag{8.23}$$

donde $E_f(b, v) \to O$ cuando $v \to O$. Aplicando (8.22) en (8.23) obtenemos

$$(8.24)\quad \begin{aligned} f(b+v)-f(b) &= f'(b)g'(a)(y) + f'(b)(\|y\|\, E_g(a,y)) + \|v\|\, E_f(b,v) \\ &= f'(b)g'(a)(y) + \|y\|\, E(a,y), \end{aligned}$$

donde $E(a, O) = O$ y

$$(8.25)\qquad E(a,y) = f'(b)(E_g(a,y)) + \frac{\|v\|}{\|y\|} E_f(b,v) \qquad \text{si} \quad y \neq O.$$

Para completar la demostración necesitamos probar que $E(a, y) \to O$ cuando $y \to O$.

El primer término del segundo miembro de (8.25) tiende a $O$ cuando $y \to O$ porque $E_g(a, y) \to O$ cuando $y \to O$ y las transformaciones lineales son continuas en $O$. .

En el segundo término del segundo miembro de (8.25) el factor $E_f(b, v) \to O$ porque $v \to O$ cuando $y \to O$. El cociente $\|v\|/\|y\|$ permanece acotado porque, según (8.22) y (8.20) tenemos

$$\|v\| \leq M_g(a)\, \|y\| + \|y\|\, \|E_g(a,y)\|.$$

Por consiguiente los dos términos del segundo miembro de (8.25) tienden a $O$ cuando $y \to O$, así que $E(a, y) \to O$.

De este modo, de (8.24) y (8.21) obtenemos la fórmula de Taylor

$$h(a+y) - h(a) = f'(b)g'(a)(y) + \|y\|\, E(a,y),$$

donde $E(a, y) \to O$ cuando $y \to O$. Esto demuestra que $h$ es diferenciable en $a$ y que la diferencial $h'(a)$ es igual a la composición $f'(b) \circ g'(a)$.

## 8.21 Forma matricial de la regla de la cadena

Sea $h = f \circ g$, donde $g$ es diferenciable en $a$ y $f$ diferenciable en $b = g(a)$. La regla de la cadena establece que

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a).$$

Podemos expresar la regla de la cadena en función de las matrices jacobianas $Dh(a)$, $Df(b)$, y $Dg(a)$ que representan las transformaciones lineales $h'(a)$, $f'(b)$, y $g'(a)$, respectivamente. Puesto que la composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de sus matrices, obtenemos

$$(8.26)\qquad Dh(a) = Df(b)\, Dg(a), \qquad \text{donde} \quad b = g(a).$$

Ésta es la llamada *forma matricial de la regla de la cadena.* También puede escribirse como un conjunto de ecuaciones escalares expresando cada matriz en función de sus elementos.

Supongamos que $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^p$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) \in \mathbf{R}^n$, y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \in \mathbf{R}^m$. Entonces $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) \in \mathbf{R}^m$ y podemos escribir

$$\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n), \qquad \boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m), \qquad \boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_m).$$

La matriz $D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a})$ es $m \times p$, la matriz $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ es $m \times n$, y $D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ es una matriz $n \times p$, y vienen dadas por

$$D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) = [D_j h_i(\boldsymbol{a})]_{i,j=1}^{m,p}, \qquad D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) = [D_k f_i(\boldsymbol{b})]_{i,k=1}^{m,n}, \qquad D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = [D_j g_k(\boldsymbol{a})]_{k,j=1}^{n,p}.$$

La ecuación matricial (8.26) es equivalente a $mp$ ecuaciones escalares,

$$D_j h_i(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f_i(\boldsymbol{b}) D_j g_k(\boldsymbol{a}), \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{y} \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Estas ecuaciones expresan las derivadas parciales de los componentes de $\boldsymbol{h}$ en función de las derivadas parciales de los componentes de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$.

EJEMPLO 1. *Extensión de la regla de la cadena para campos escalares.* Supongamos que $f$ es un campo escalar ($m = 1$). Entonces $h$ también lo es y existen $p$ ecuaciones en la regla de la cadena, una para cada una de las derivadas parciales de $h$:

$$D_j h(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\boldsymbol{b}) D_j g_k(\boldsymbol{a}), \quad \text{para} \ j = 1, 2, \ldots, p.$$

El caso particular $p = 1$ ya se consideró en la sección 8.15. Entonces se tiene la única ecuación,

$$h'(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\boldsymbol{b}) g_k'(\boldsymbol{a}).$$

Consideremos ahora $p = 2$ y $n = 2$. Pongamos $\boldsymbol{a} = (s, t)$ y $\boldsymbol{b} = (x, y)$. Los componentes $x$ e $y$ están ligados a $s$ y $t$ por las ecuaciones

$$x = g_1(s, t), \qquad y = g_2(s, t).$$

La regla de la cadena nos da un par de ecuaciones para las derivadas parciales de $h$:

$$D_1h(s,t) = D_1f(x,y)\,D_1g_1(s,t) + D_2f(x,y)\,D_1g_2(s,t)\,,$$
$$D_2h(s,t) = D_1f(x,y)\,D_2g_1(s,t) + D_2f(x,y)\,D_2g_2(s,t)\,.$$

Empleando el signo $\partial$, también se pone este par de ecuaciones en la forma

$$\text{(8.27)} \qquad \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\,, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\,.$$

EJEMPLO 2. *Coordenadas polares.* La temperatura de una placa delgada se representa por un campo escalar $f$, siendo $f(x, y)$ la temperatura en $(x, y)$. Introduciendo las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, la temperatura se convierte en una función de $r$ y $\theta$ determinada por medio de la ecuación

$$\varphi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,.$$

Expresar las derivadas parciales $\partial\varphi/\partial r$ y $\partial\varphi/\partial\theta$ en función de las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

*Solución.* Utilicemos la regla de la cadena en la forma (8.27), poniendo $(r, \theta)$ en lugar de $(s, t)$, y $\varphi$ en lugar de $h$. Las ecuaciones

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

nos dan

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta\,.$$

Sustituyendo esas fórmulas en (8.27) obtenemos

$$\text{(8.28)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}\theta\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -r\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{sen}\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\,.$$

Éstas son las fórmulas pedidas correspondientes a $\partial\varphi/\partial r$ y $\partial\varphi/\partial\theta$.

EJEMPLO 3. *Derivadas parciales de segundo orden.* Continuando el ejemplo 2, expresar la derivada parcial de segundo orden $\partial^2\varphi/\partial\theta^2$ en función de las derivadas parciales de $f$.

*Solución.* Comencemos con la fórmula que da $\partial\varphi/\partial\theta$ en (8.28) y derivemos respecto a $\theta$, considerando $r$ como una constante. En el segundo miembro hay dos términos, cada uno de los cuales debe derivarse como producto. Obtenemos así

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -r\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta)}{\partial\theta} - r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + r\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$(8.29)\qquad = -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Para calcular las derivadas de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ respecto a $\theta$ debe tenerse en cuenta que como funciones de $r$ y $\theta$, $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son *funciones compuestas* dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

Por consiguiente, sus derivadas respecto a $\theta$ tienen que determinarse con la regla de la cadena. Apliquemos otra vez (8.27), reemplazando $f$ por $D_1 f$, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial(D_1 f)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial(D_1 f)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(r\cos\theta).$$

Del mismo modo, aplicando (8.27) reemplazando $f$ por $D_2 f$, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial(D_2 f)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial(D_2 f)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta).$$

Cuando estas fórmulas se aplican en (8.29) obtenemos

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r^2\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$
$$- r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y} - r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ésta es la fórmula que deseábamos para $\partial^2\varphi/\partial\theta^2$. Fórmulas análogas para las derivadas parciales segundas $\partial^2\varphi/\partial r^2$, $\partial^2\varphi/(\partial r\,\partial\theta)$, y $\partial^2\varphi/(\partial\theta\,\partial r)$ se proponen en el ejercicio 5 de la próxima sección.

## 8.22 Ejercicios

En estos ejercicios puede suponerse la diferenciabilidad de todas las funciones que se consideran.

1. La sustitución $t = g(x, y)$ convierte $F(t)$ en $f(x, y)$, siendo $f(x, y) = F[g(x, y)]$.
   a) Demostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F'[g(x, y)] \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = F'[g(x, y)] \frac{\partial g}{\partial y}.$$

   b) Considérese el caso particular $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$, $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$. Calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ utilizando las fórmulas del apartado a). Comprobar el resultado, determinando $f(x, y)$ explícitamente en función de $x$ e $y$, y calculando directamente $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ a partir de $f$.
2. La sustitución $u = (x - y)/2$, $v = (x + y)/2$ cambia $f(u, v)$ en $F(x, y)$. Aplicar en forma adecuada la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial y$ en función de las derivadas parciales $\partial f/\partial u$ y $\partial f/\partial v$.
3. Las ecuaciones $u = f(x, y)$, $x = X(s, t)$, $y = Y(s, t)$ definen $u$ como función de $s$ y $t$, $u = F(s, t)$.
   a) Aplicar una forma adecuada de la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\partial F/\partial s$ y $\partial F/\partial t$ en función de $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial X/\partial s$, $\partial X/\partial t$, $\partial Y/\partial s$, $\partial Y/\partial t$.
   b) Si $\partial^2 f/(\partial x\, \partial y) = \partial^2 f/(\partial y\, \partial x)$, demostrar que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial s}\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2.$$

   c) Encontrar fórmulas parecidas para las derivadas parciales $\partial^2 F/(\partial s\, \partial t)$ y $\partial^2 F/\partial t^2$.
4. Resolver el ejercicio 3 en cada uno de los siguientes casos particulares:
   a) $X(s, t) = s + t$, $\quad Y(s, t) = st$.
   b) $X(s, t) = st$, $\quad Y(s, t) = s/t$.
   c) $X(s, t) = (s - t)/2$, $\quad Y(s, t) = (s + t)/2$.
5. La introducción de las coordenadas polares cambia $f(x, y)$ en $\varphi(r, \theta)$, donde $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Expresar las derivadas parciales de segundo orden $\partial^2\varphi/\partial r^2$, $\partial^2\varphi/(\partial r\, \partial\theta)$ y $\partial^2\varphi/(\partial\theta\, \partial r)$ en función de las derivadas parciales de $f$. Pueden utilizarse las fórmulas deducidas en el ejemplo 2 de la sección 8.21.
6. Las ecuaciones $u = f(x, y, z)$, $x = X(r, s, t)$, $y = Y(r, s, t)$ y $z = Z(r, s, t)$, definen $u$ como función de $r$, $s$ y $t$, sea ésta $u = F(r, s, t)$. Aplicar la forma adecuada de la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\partial F/\partial r$, $\partial F/\partial s$, y $\partial F/\partial t$ en función de las derivadas parciales de $f$, $X$, $Y$ y $Z$.
7. Resolver el ejercicio 6 en cada uno de los casos particulares siguientes:
   a) $X(r, s, t) = r + s + t$, $\quad Y(r, s, t) = r - 2s + 3t$, $\quad Z(r, s, t) = 2r + s - t$.
   b) $X(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2$, $\quad Y(r, s, t) = r^2 - s^2 - t^2$, $\quad Z(r, s, t) = r^2 - s^2 + t^2$.
8. Las ecuaciones $u = f(x, y, z)$, $x = X(s, t)$, $y = Y(s, t)$, $z = Z(s, t)$ define $u$ como función de $s$ y $t$, sea ésta $u = F(s, t)$. Aplicando una forma adecuada de la regla de la cadena expresar las derivadas parciales $\partial F/\partial s$ y $\partial F/\partial t$ en función de las derivadas parciales de $f$, $X$, $Y$ y $Z$.

9. Resolver el ejercicio 8 en cada uno de los casos particulares siguientes:
   a) $X(s, t) = s^2 + t^2, \qquad Y(s, t) = s^2 - t^2, \qquad Z(s, t) = 2st.$
   b) $X(s, t) = s + t, \qquad Y(s, t) = s - t, \qquad Z(s, t) = st.$
10. Las ecuaciones $u = f(x, y)$, $x = X(r, s, t)$, $y = Y(r, s, t)$ definen $u$ como función de $r$, $s$ y $t$, sea ésta $u = F(r, s, t)$. Aplicar una forma adecuada de la regla de la cadena y expresar las derivadas parciales $\partial F/\partial r$, $\partial F/\partial s$ y $\partial F/\partial t$ en función de las derivadas parciales de $f$, $X$ e $Y$.
11. Resolver el ejercicio 10 en cada uno de los casos particulares siguientes:
   a) $X(r, s, t) = r + s, \qquad Y(r, s, t) = t.$
   b) $X(r, s, t) = r + s + t, \qquad Y(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2.$
   c) $X(r, s, t) = r/s, \qquad Y(r, s, t) = s/t.$
12. Sea $h(\boldsymbol{x}) = f[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]$, donde $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ es un campo vectorial diferenciable en $\boldsymbol{a}$, y $f$ un campo escalar diferenciable en $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$. Utilizar la regla de la cadena para demostrar que el gradiente de $h$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores gradientes de los componentes de $\boldsymbol{g}$, así:

$$\nabla h(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\boldsymbol{b}) \nabla g_k(\boldsymbol{a}).$$

13. a) Si $\boldsymbol{f}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ demostrar que la matriz jacobiana $D\boldsymbol{f}(x, y, z)$ es la matriz identidad de orden 3.
   b) Hallar todos los campos vectoriales diferenciables $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ para los que la matriz jacobiana $D\boldsymbol{f}(x, y, z)$ es la matriz identidad de orden 3.
   c) Hallar todos los campos vectoriales diferenciables $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ para los que la matriz jacobiana es una matriz diagonal de la forma diag $(p(x), q(y), r(z))$, en la que $p$, $q$ y $r$ son funciones continuas dadas.
14. Sean $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ y $\boldsymbol{g}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ dos campos vectoriales definidos del siguiente modo:

$$\boldsymbol{f}(x, y) = e^{x+2y}\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}(y + 2x)\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{g}(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3)\boldsymbol{i} + (2v - u^2)\boldsymbol{j}.$$

   a) Calcular cada una de las matrices jacobianas $D\boldsymbol{f}(x, y)$ y $D\boldsymbol{g}(u, v, w)$.
   b) Calcular la función compuesta $\boldsymbol{h}(u, v, w) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(u, v, w)]$.
   c) Calcular la matriz jacobiana $D\boldsymbol{h}(1, -1, 1)$.
15. Sean $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ y $\boldsymbol{g}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dos campos vectoriales definidos como sigue:

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x^2 + y + z)\boldsymbol{i} + (2x + y + z^2)\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{g}(u, v, w) = uv^2w^2\boldsymbol{i} + w^2 \operatorname{sen} v\,\boldsymbol{j} + u^2e^v\boldsymbol{k}.$$

   a) Calcular cada una de las matrices jacobianas $D\boldsymbol{f}(x, y, z)$ y $D\boldsymbol{g}(u, v, w)$.
   b) Calcular la función compuesta $\boldsymbol{h}(u, v, w) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(u, v, w)]$.
   c) Calcular la matriz jacobiana $D\boldsymbol{h}(u, 0, w)$.

## * 8.23 Condiciones suficientes para la igualdad de las derivadas parciales mixtas

Si $f$ es una función real de dos variables, las dos derivadas parciales mixtas $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$ no son necesariamente iguales. Con la notación $D_{1,2}f$ queremos significar $D_1(D_2 f) = \partial^2 f/(\partial x\, \partial y)$ y con $D_{2,1}f$ significar $D_2(D_1 f) = \partial^2 f/(\partial y\, \partial x)$. Por ejemplo, si $f$ está definida por las ecuaciones

$$f(x, y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{para} \quad (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0,$$

es sencillo demostrar que $D_{2,1}f(0, 0) = -1$ y $D_{1,2}f(0, 0) = 1$. Esto puede verse así:

La definición de $D_{2,1}f(0, 0)$ establece que

$$D_{2,1}f(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{D_1 f(0, k) - D_1 f(0, 0)}{k}. \tag{8.30}$$

Ahora bien

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

y, si $(x,y) \neq (0, 0)$, encontramos

$$D_1 f(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Por consiguiente, si $k \neq 0$ tenemos $D_1 f(0, k) = -k^5/k^4 = -k$ y por tanto

$$\frac{D_1 f(0, k) - D_1 f(0, 0)}{k} = -1.$$

Aplicando este resultado en (8.30) encontramos que $D_{2,1}f(0, 0) = -1$. Con razonamiento parecido demostramos que $D_{1,2}f(0,0) = 1$, y por tanto $D_{2,1}f(0, 0) \neq D_{1,2}f(0, 0)$.

En el ejemplo que acabamos de considerar las dos derivadas parciales mixtas $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$ son ambas no continuas en el origen. Puede demostrarse que las dos parciales mixtas *son* iguales en un punto $(a, b)$ si por lo menos una de ellas es continua en el punto. Demostraremos primero que son iguales si *ambas* son continuas. Con mayor precisión, tenemos el teorema siguiente.

TEOREMA 8.12. CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES MIXTAS. *Si $f$ es un campo escalar tal que las derivadas parciales $D_1 f$, $D_2 f$, $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$ existen en un conjunto abierto $S$. Si $(a, b)$ es un punto de $S$, y en tal punto $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$ son continuas, entonces tenemos*

$$D_{1,2}f(a, b) = D_{2,1}f(a, b). \tag{8.31}$$

*Demostración.* Elijamos $h$ y $k$ no nulos tales que el rectángulo $R(h, k)$

con vértices $(a, b)$, $(a + h, b)$, $(a + h,\ b + k)$ y $(a, b + k)$ esté situado en $S$. (Véase figura 8.9.)

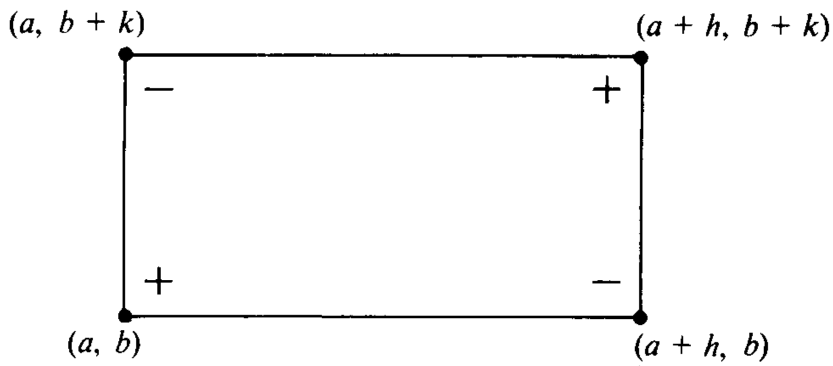



**FIGURA 8.9** $\nabla(h,k)$ *es una combinación de los valores de f en los vértices.*

Consideremos la expresión

$$\Delta(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b).$$

Es ésta una combinación de los valores de $f$ en los vértices de $R(h, k)$, tomados con los signos algebraicos indicados en la figura 8.9. Expresaremos $\Delta(h, k)$ en función de $D_{2,1}f$ y también de $D_{1,2}f$.

Consideremos una nueva función $G$ de una variable definida por la ecuación

$$G(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$$

para todo $x$ comprendido entre $a$ y $a + h$. (Geométricamente, consideramos los valores de $f$ en aquellos puntos en los que una recta vertical corta los lados horizontales de $R(h, k.)$ Tenemos entonces

$$\Delta(h, k) = G(a + h) - G(a). \tag{8.32}$$

Aplicando el teorema del valor medio uni-dimensional al segundo miembro de (8.3) obtenemos $G(a + h) - G(a) = hG'(x_1)$, siendo $x_1$ un punto situado entre $a$ y $a + h$. Puesto que $G'(x) = D_1f(x, b + k) - D_1f(x, b)$, la ecuación (8.32) se transforma en

$$\Delta(h, k) = h[D_1f(x_1, b + k) - D_1f(x_1, b)]. \tag{8.33}$$

Aplicando el teorema del valor medio al segundo miembro de (8.33) obtenemos

$$\Delta(h, k) = hkD_{2.1}f(x_1, y_1), \tag{8.34}$$

siendo $y_1$un punto situado entre $b$ y $b + k$. El punto $(x_1, y_1)$ pertenece al rectángulo $R(h, k)$.

Aplicando el mismo procedimiento a la función $H(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$ encontramos una segunda expresión para $\Delta(h, k)$, o sea,

$$\Delta(h, k) = hkD_{1,2}f(x_2, y_2), \tag{8.35}$$

donde $(x_2, y_2)$ pertenece también a $R(h, k)$. Igualando las dos expresiones de $\Delta(h, k)$ y suprimiendo $hk$ obtenemos

$$D_{1,2}f(x_1, y_1) = D_{2,1}f(x_2, y_2).$$

Hagamos ahora que $(h, k) \to (0, 0)$ y teniendo en cuenta la continuidad de $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$ en el punto $(a, b)$ obtenemos (8.31).

El razonamiento anterior puede modificarse para demostrar una versión más fuerte del teorema 8.12.

TEOREMA 8.13. *Si $f$ es un campo escalar para el cual existen las derivadas parciales $D_1f$, $D_2f$ y $D_{2,1}f$ en un conjunto abierto $S$ que contenga $(a, b)$, y si además $D_{2,1}f$ es continua en $S$, entonces existe la derivada $D_{1,2}f(a, b)$ y tenemos*

$$D_{1,2}f(a, b) = D_{2,1}f(a, b).$$

*Demostración.* Definamos $\Delta(h, k)$ como en la demostración del teorema 8.12. La parte de la demostración que lleva a la ecuación (8.34) es válida, dándonos

$$\frac{\Delta(h, k)}{hk} = D_{2,1}f(x_1, y_1) \tag{8.36}$$

para un cierto $(x_1, y_1)$ del rectángulo $R(h, k)$. El resto de la demostración no es aplicable ya que precisa de la existencia de la derivada $D_{1,2}f(a, b)$, que es justamente lo que deseamos demostrar.

La definición de $D_{1,2}f(a, b)$ establece que

$$D_{1,2}f(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{D_2f(a + h, b) - D_2f(a, b)}{h}. \tag{8.37}$$

Vamos a demostrar que este límite existe y que tiene el valor $D_{2,1}f(a, b)$. A partir de la definición de $D_2f$ tenemos

$$D_2f(a, b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

y

$$D_2f(a + h, b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a + h, b + k) - f(a + h, b)}{k}.$$

Por tanto el cociente de diferencias (8.37) puede escribirse del siguiente modo

$$\frac{D_2f(a + h, b) - D_2f(a, b)}{h} = \lim_{k\to 0}\frac{\Delta(h, k)}{hk}.$$

Teniendo en cuenta (8.36) podemos ponerlo en la forma

$$(8.38)\qquad \frac{D_2f(a + h, b) - D_2f(a, b)}{h} = \lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_1, y_1).$$

Para completar la demostración tenemos que probar que

$$(8.39)\qquad \lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_1, y_1)\right] = D_{2,1}f(a, b).$$

Cuando $k \to 0$, el punto $y_1 \to b$, pero es desconocido el comportamiento de $x_1$ como función de $k$. Si suponemos que $x_1$ se aproxima a algún límite, sea $\bar{x}$, cuando $k \to 0$, entonces por la continuidad de $D_{2,1}f$ deducimos que

$$\lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_1, y_1) = D_{2,1}f(\bar{x}, b).$$

Puesto que el límite $\bar{x}$ estaría en el intervalo $a \leq \bar{x} \leq a+h$, podemos suponer que $h \to 0$ y deducir (8.39). No obstante, por el hecho de que $\bar{x}$ depende de $k$ de forma desconocida, se hace necesario un argumento algo más sólido.

En virtud de la ecuación (8.38) sabemos que existe el siguiente límite:

$$\lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_1, y_1).$$

Designemos este límite con $F(h)$. Para completar la demostración hay que probar que

$$\lim_{h\to 0} F(h) = D_{2,1}f(a, b).$$

A tal fin apelamos a la definición de continuidad de $D_{2,1}f$ en $(a, b)$.

Sea $\epsilon$ un número positivo dado. La continuidad de $D_{2,1}f$ en $(a, b)$ significa que existe un disco abierto $N$ con centro en $(a, b)$ y radio $\delta$, por ejemplo, tal que

$$|D_{2,1}f(x, y) - D_{2,1}f(a, b)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad (x, y) \in N. \tag{8.40}$$

Si elegimos $h$ y $k$ de manera que $|h| < \delta/2$ y $|k| < \delta/2$, todo el rectángulo dibujado en la figura 8.9 estará contenido en el entorno $N$ y, en particular, el punto $(x_1, y_1)$ estará en $N$. Por consiguiente (8.40) es válida cuando $(x, y) = (x_1, y_1)$ y podemos escribir

$$0 \le |D_{2,1}f(x_1, y_1) - D_{2,1}f(a, b)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{8.41}$$

Mantengamos ahora fijo $h$ y hagamos que $k \to 0$. El término $D_{2,1}f(x_1, y_1)$ tiende a $F(h)$ y los otros términos de (8.41) son independientes de $k$. Tenemos por tanto

$$0 \le |F(h) - D_{2,1}f(a, b)| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

con tal que $0 < |h| < \delta/2$. Pero éste es precisamente el significado de la proposición

$$\lim_{h\to 0} F(h) = D_{2,1}f(a, b)$$

y, como ya dijimos, esto completa la demostración.

*Nota*: Deberá observarse que el teorema es también válido si en él enunciado intercambiamos $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$.

## 8.24 Ejercicios varios

1. Hallar un campo escalar $f$ que satisfaga las dos condiciones siguientes·

a) Existen y son nulas las derivadas parciales $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$.
b) Existe la derivada direccional en el origen en la dirección del vector $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ y tiene el valor 3. Explicar por qué tal función $f$ no puede ser diferenciable en (0,0).

2. Sea $f$ una función definida como sigue:

$$f(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0.$$

Calcular, cuando existan, las derivadas parciales siguientes: $D_1f(0,0)$, $D_2f(0,0)$, $D_{2,1}f(0,0)$, $D_{1,2}f(0,0)$.

3. Sea $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^3+y^6}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, y definamos $f(0,0)=0$.

a) Demostrar que la derivada $f'(\boldsymbol{O};\boldsymbol{a})$ existe para todo vector $\boldsymbol{a}$ y calcular su valor en función de los componentes de $\boldsymbol{a}$.
b) Determinar si $f$ es o no continua en el origen.

4. Definamos $f(x,y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\,dt$ para $x>0$, $y>0$. Calcular $\partial f/\partial x$ en función de $x$ e $y$.
5. Supongamos que las ecuaciones $u=f(x,y)$, $x=X(t)$, $y=Y(t)$ definen $u$ como función de $t$, $u=F(t)$. Calcular la derivada tercera $F'''(t)$ en función de las derivadas de $f, X,$ e $Y$.
6. El cambio de variables $x=u+v$, $y=uv^2$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Calcular el valor de $\partial^2 g/(\partial v\,\partial u)$ en el punto en el que $u=1$, $v=1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 1$$

en dicho punto.

7. El cambio de variables $x=uv$, $y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$.

a) Calcular $\partial g/\partial u$, $\partial g/\partial v$ y $\partial^2 g/(\partial u\,\partial v)$en función de las derivadas parciales de $f$. (Puede suponerse la igualdad de las parciales mixtas.)
b) Si $\|\nabla f(x,y)\|^2 = 2$ para todo $x$ e $y$, determinar las constantes $a$ y $b$ tales que

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = u^2+v^2.$$

8. Dos funciones $F$ y $G$ de una variable y una función $z$ de dos variables están ligadas por la ecuación

$$[F(x)+G(y)]^2 e^{z(x,y)} = 2F'(x)G'(y)$$

con tal que $F(x)+G(y) \neq 0$. Demostrar que la derivada parcial mixta $D_{2,1}z(x,y)$ nunca es cero. (Puede suponerse la existencia y continuidad de todas las derivadas que aparezcan.)

9. Un campo escalar $f$ es acotado y continuo en un rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$. Se define en $R$ un nuevo campo escalar $g$ del modo siguiente:

$$g(u,v) = \int_c^v \left[\int_a^u f(x,y)\,dx\right] dy.$$

a) Puede demostrarse que para cada $u$ fija en $[a, b]$ la función $A$ definida en $[c, d]$ mediante la ecuación $A(y) = \int_a^u f(x, y)\,dx$ es continua en $[c, d]$. Utilizar este resultado para demostrar que $\partial g/\partial v$ existe y es continua en el rectángulo abierto $S = (a, b) \times (c, d)$ (el interior de $R$).
b) Supóngase que

$$\int_c^v \left[\int_a^u f(x, y)\,dx\right] dy = \int_a^u \left[\int_c^v f(x, y)\,dy\right] dx$$

para todo $(u, v)$ de $R$. Demostrar que $g$ es diferenciable en $S$ y que las derivadas parciales mixtas $D_{1,2}g(u, v)$ y $D_{2,1}g(u, v)$ existen y son iguales a $f(u, v)$ en cada punto de $S$.

10. En relación con el ejercicio 9. Supóngase que $u$ y $v$ se expresan paramétricamente del siguiente modo: $u = A(t)$, $v = B(t)$; y sea $\varphi(t) = g[A(t), B(t)]$.
a) Determinar $\varphi'(t)$ en función de $f$, $A'$ y $B'$.
b) Calcular $\varphi'(t)$ en función de $t$ cuando $f(x, y) = e^{x+y}$ y $A(t) = B(t) = t^2$. (Supóngase que $R$ está situado en el primer cuadrante.)
11. Si $f(x, y, z) = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})$, siendo $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son vectores constantes, demostrar que $\nabla f(x, y, z) = \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})$.
12. Sea $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ y pongamos $r = \|\boldsymbol{r}\|$. Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son vectores constantes, demostrar que:

a) $\boldsymbol{A} \cdot \nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}$.

b) $\boldsymbol{B} \cdot \nabla\left(\boldsymbol{A} \cdot \nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\right) = \dfrac{3\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{r}}{r^5} - \dfrac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{r^3}$

13. Hallar el conjunto de todos los puntos $(a, b, c)$, en el espacio de 3 dimensiones, en los cuales las dos esferas $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se cortan ortogonalmente. (Sus planos tangentes deberán ser perpendiculares en cada punto de intersección.)
14. Un cilindro cuya ecuación es $y = f(x)$ es tangente a la superficie $z^2 + 2xz + y = 0$ en todos los puntos comunes a las dos superficies. Hallar $f(x)$.

# 9

# APLICACIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

## 9.1 Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Los teoremas de Cálculo diferencial desarrollados en el capítulo 8 tienen gran número de aplicaciones. Este capítulo muestra su utilización en algunos ejemplos relativos a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, a las funciones implícitas y a problemas de extremos. Comenzamos con algunas observaciones elementales referentes a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Una ecuación que relaciona un campo escalar $f$ y sus derivadas parciales se llama *ecuación diferencial en derivadas parciales.* Dos ejemplos sencillos en los que $f$ es una función de dos variables son la ecuación de primer orden

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \tag{9.1}$$

y la de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0. \tag{9.2}$$

Cada una de ellas es una ecuación diferencial en derivadas parciales *lineal* homogénea. Esto es, cada una tiene la forma $L(f) = 0$, siendo $L$ un operador diferencial lineal que contiene una o más derivadas parciales. La ecuación (9.2) se llama *ecuación de Laplace* bi-dimensional.

Parte de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias puede extenderse a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Por ejemplo, es fácil comprobar que para cada una de las ecuaciones (9.1) y (9.2) el conjunto de soluciones es un espacio lineal. Sin embargo, hay una diferencia importante entre las ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales y las lineales ordinarias, que debe ser mencionada desde el principio. Ponemos de manifiesto esa diferencia comparando la ecuación en derivadas parciales (9.1) con la ecuación diferencial ordinaria

$$f'(x) = 0 . \tag{9.3}$$

La función más general que satisface (9.3) es $f(x) = C$, siendo $C$ una constante arbitraria. Es decir, el espacio-solución de (9.3) es uni-dimensional. Pero la función de tipo más general que satisface (9.1) es

$$f(x, y) = g(y),$$

donde $g$ es una función cualquiera de $y$. Puesto que $g$ es arbitraria podemos obtener con facilidad un conjunto infinito de soluciones independientes. Por ejemplo, podemos tomar $g(y) = e^{cy}$ y hacer que $c$ varíe en todo el campo real. Así pues, el espacio solución de (9.1) es de *infinitas* dimensiones.

En ciertos aspectos este ejemplo refleja lo que en general ocurre. Algunas veces en la resolución de una ecuación en derivadas parciales de primer orden, se precisa una integración para hacer desaparecer cada derivada parcial. Entonces se introduce un función arbitraria en la solución. Esto ocurre en un espacio de soluciones de infinitas dimensiones.

En muchos problemas que incluyen ecuaciones en derivadas parciales es preciso seleccionar del conjunto de soluciones una solución particular que satisfaga una o más condiciones auxiliares. Como es lógico la naturaleza de esas condiciones tiene un efecto profundo en la existencia o en la unicidad de las soluciones. En este libro no se llegará a un estudio sistemático de tales problemas. En cambio, trataremos algunos casos particulares para ilustrar las ideas introducidas en el capítulo 8.

## 9.2 Ecuación en derivadas parciales de primer orden con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$3\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + 2\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 . \tag{9.4}$$

Todas las soluciones de esta ecuación pueden encontrarse mediante consideraciones geométricas. Expresemos el primer miembro como un producto escalar, y pongamos la ecuación en la forma

$$(3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot \nabla f(x, y) = 0 .$$

Esto nos dice que el vector gradiente $\nabla f(x, y)$ es ortogonal al vector $3i + 2j$ en cada punto $(x, y)$. Pero sabemos también que $\nabla f(x, y)$ es ortogonal a las curvas de nivel de $f$. Luego esas curvas de nivel deben ser rectas paralelas a $3i + 2j$. Es decir, las curvas de nivel de $f$ son las rectas

$$2x - 3y = c.$$

Por lo tanto $f(x, y)$ es constante cuando $2x - 3y$ es constante. Esto sugiere que

$$f(x, y) = g(2x - 3y) \tag{9.5}$$

para alguna función $g$.

Comprobemos ahora que, para cada función diferenciable $g$, el campo escalar $f$ definido por (9.5) satisface realmente (9.4). Utilizando la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales de $f$ encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2g'(2x - 3y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3g'(2x - 3y),$$

$$3\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 6g'(2x - 3y) - 6g'(2x - 3y) = 0.$$

Por consiguiente, $f$ satisface (9.4).

Recíprocamente, podemos demostrar que toda función $f$ diferenciable que satisfaga (9.4) necesariamente debe ser de la forma (9.5) para una cierta $g$. Para ello, introduzcamos un cambio lineal de variables,

$$x = Au + Bv, \qquad y = Cu + Dv. \tag{9.6}$$

Éste transforma $f(x, y)$ en una función de $u$ y $v$, sea ésta

$$h(u, v) = f(Au + Bv, Cu + Dv).$$

Elegiremos las constantes $A, B, C, D$ de modo que $h$ satisfaga la ecuación más sencilla

$$\frac{\partial h(u, v)}{\partial u} = 0. \tag{9.7}$$

La resolveremos y demostraremos que $f$ tiene la forma deseada.

Con la regla de la cadena encontramos

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}A + \frac{\partial f}{\partial y}C.$$

Puesto que $f$ satisface (9.4) tenemos $\partial f/\partial y = -(3/2)(\partial f/\partial x)$, por lo que la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(A - \frac{3}{2}C\right).$$

Por consiguiente, $h$ satisfará (9.7) si elegimos $A = \frac{3}{2}C$. Tomando $A = 3$ y $C = 2$ encontramos

(9.8) $$x = 3u + Bv, \qquad y = 2u + Dv.$$

Con esta elección de $A$ y $C$, la función $h$ satisface (9.7), así que $h(u, v)$ es una función sólo de $v$,

$$h(u, v) = g(v)$$

para una cierta función $g$. Para expresar $v$ en función de $x$ e $y$ eliminamos $u$ en (9.8) y obtenemos $2x - 3y = (2B - 3D)v$. Elijamos ahora $B$ y $D$ de manera que $2B - 3D = 1$, por ejemplo $B = 2$, $D = 1$. Para estos valores la transformación (9.6) es no singular; tenemos $v = 2x - 3y$, y por tanto

$$f(x, y) = h(u, v) = g(v) = g(2x - 3y).$$

Esto demuestra que toda función diferenciable $f$ solución de (9.4) tiene la forma (9.5).

El mismo tipo de razonamiento demuestra el siguiente teorema para las ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes.

TEOREMA 9.1. *Si $g$ es una función diferenciable en $\mathbf{R}^1$ y $f$ es el campo escalar definido en $\mathbf{R}^2$ por medio de la ecuación*

(9.9) $$f(x, y) = g(bx - ay),$$

*en la que $a$ y $b$ son constantes, no simultáneamente nulas, entonces $f$ satisface la ecuación en derivadas parciales de primer orden*

(9.10) $$a\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + b\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

*en todo $\mathbf{R}^2$. Recíprocamente, toda solución diferenciable de* (9.10) *tiene necesariamente la forma* (9.9) *para una cierta $g$.*

## 9.3 Ejercicios

En este conjunto de ejercicios puede suponerse la diferenciabilidad de todas las funciones que se consideran.

1. Determinar la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$4\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+3\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

que satisfaga la condición $f(x,0)=\operatorname{sen} x$ para todo $x$.

2. Determinar la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$5\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

que satisfaga las condiciones $f(0,0)=0$, y $D_1f(x,0)=e^x$ para todo $x$.

3. a) Si $u(x,y)=f(xy)$, demostrar que $u$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Hallar una solución tal que $u(x,x)=x^4e^{x^2}$ para todo $x$.

b) Si $v(x,y)=f(x/y)$ para $y\neq 0$, demostrar que $v$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Hallar una solución tal que $v(1,1)=2$ y $D_1v(x,1/x)=1/x$ para todo $x\neq 0$.

4. Si $g(u,v)$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 g(u,v)}{\partial u\,\partial v}=0,$$

demostrar que $g(u,v)=\varphi_1(u)+\varphi_2(v)$, donde $\varphi_1(u)$ es una función sólo de $u$ y $\varphi_2(v)$ lo es únicamente de $v$.

5. Supóngase que $f$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}-3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

Introducir el cambio lineal de variables $x=Au+Bv$, $y=Cu+Dv$, siendo $A, B, C, D$ constantes, y póngase $g(u,v)=f(Au+Bv, Cu+Dv)$. Calcular valores enteros no nulos de $A, B, C, D$ para los que $g$ satisfaga $\partial^2 g/(\partial u\,\partial v)=0$. Resolver esta ecuación correspondiente a $g$ y determinar luego $f$. (Supóngase la igualdad de las derivadas parciales mixtas.)

6. Una función $u$ está definida mediante una ecuación de la forma

$$u(x, y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Demostrar que $u$ satisface la ecuación diferencial de la forma

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u,$$

y hallar $G(x, y)$.

7. La sustitución $x = e^s$, $y = e^t$ transforma $f(x, y)$ en $g(s, t)$, siendo $g(s, t) = f(e^s, e^t)$. Si se sabe que $f$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

demostrar que $g$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0.$$

8. Sea $f$ un campo escalar diferenciable en un conjunto abierto $S$ de $\mathbf{R}^n$. Decimos que $f$ es *homogénea de grado $p$* en $S$ si

$$f(t\boldsymbol{x}) = t^p f(\boldsymbol{x})$$

para todo $t > 0$ y todo $\boldsymbol{x}$ de $S$ para los que $t\boldsymbol{x} \in S$. Demostrar que para un campo escalar homogéneo de grado $p$ se tiene

$$\boldsymbol{x} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}) = p f(\boldsymbol{x}) \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \text{ de } S.$$

Éste es el llamado *teorema de Euler para las funciones homogéneas.* Si $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ puede expresarse del siguiente modo

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = p f(x_1, \ldots, x_n).$$

[*Indicación*: Para $\boldsymbol{x}$, fijo, defínase $g(t) = f(t\boldsymbol{x})$ y calcular $g'(1)$.]

9. Demostrar el recíproco del teorema de Euler. Esto es, si $f$ satisface $\boldsymbol{x} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}) = pf(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x}$ en un conjunto abierto $S$, $f$ debe ser homogéneo de grado $p$ en $S$. [*Indicación*: Para $\boldsymbol{x}$, fijo, defínase $g(t) = f(t\boldsymbol{x}) - t^p f(\boldsymbol{x})$ y calcular $g'(t)$.]

10. Demostrar la siguiente extensión del teorema de Euler para funciones homogéneas de grado $p$ en el caso de dos dimensiones. (Supóngase la igualdad de las derivadas parciales mixtas.)

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = p(p-1)f.$$

## 9.4 La ecuación de ondas uni-dimensional

Imaginemos una cuerda tensa de longitud infinita a lo largo del eje $x$ y que puede vibrar en el plano $xy$. Designemos con $y = f(x, t)$ el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto $x$ en el instante $t$. Supongamos que, en el instante $t = 0$, la cuerda está desplazada tomando la forma de una curva $y = F(x)$. En la figura 9.1 a) se representa un ejemplo. Las figuras 9.1 b) y c) muestran las posibles curvas de desplazamiento para valores posteriores de $t$. Consideremos el desplazamiento $f(x, t)$ como una función incógnita de $x$ y $t$ que hay que determinar. Un modelo matemático para este problema (sugerido por consideraciones físicas que aquí no comentaremos) es la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

en la que $c$ es una constante positiva que depende de las características físicas de la cuerda. Esta ecuación es la llamada *ecuación de ondas uni-dimensional*. La resolveremos teniendo en cuenta ciertas condiciones auxiliares.

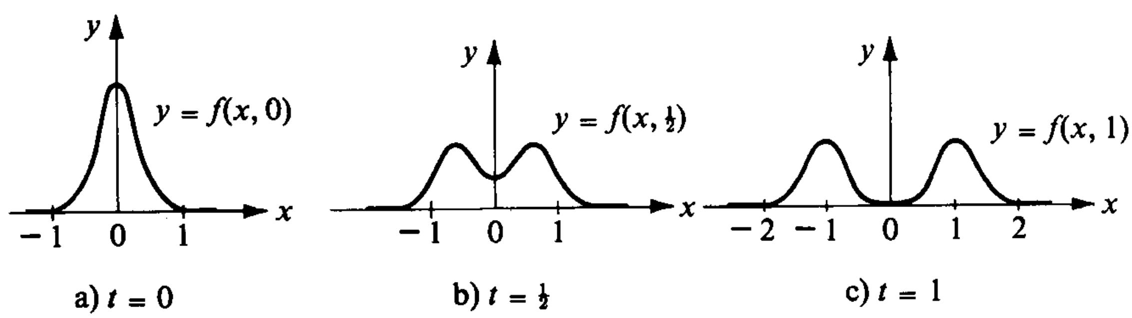



FIGURA 9.1 *Curva de desplazamiento $y = f(x, t)$ para varios valores de $t$.*

Puesto que el desplazamiento inicial es la curva dada $y = F(x)$, vamos a buscar una solución que satisfaga la condición

$$f(x, 0) = F(x).$$

Supondremos también que $\partial y/\partial t$, la velocidad de desplazamiento vertical, está dada en el instante $t = 0$, a saber

$$D_2f(x, 0) = G(x),$$

siendo $G$ una función dada. Parece razonable pensar que esta información debería bastar para determinar el subsiguiente movimiento de la cuerda. Demostraremos que esto es cierto, efectivamente, determinando la función $f$ por medio de $F$ y $G$. La solución se expresa en una forma dada por Jean d'Alembert (1717-1783), matemático y filósofo francés.

TEOREMA 9.2. SOLUCIÓN DE D'ALEMBERT DE LA ECUACIÓN DE ONDAS. *Dadas las funciones $F$ y $G$ tales que $G$ es derivable y $F$ dos veces derivable en* $\mathbf{R}^1$. *La función $f$ dada por la fórmula*

$$f(x, t) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\, ds \tag{9.11}$$

*satisface la ecuación de ondas uni-dimensional*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{9.12}$$

*y las condiciones iniciales*

$$f(x, 0) = F(x), \qquad D_2f(x, 0) = G(x). \tag{9.13}$$

*Recíprocamente, cualquier función $f$ con derivadas parciales iguales que satisfaga* (9.12) *y* (9.13) *tiene necesariamente la forma* (9.11).

*Demostración.* Comprobar que la función $f$ dada por (9.11) satisface la ecuación de ondas y las condiciones iniciales, es un ejercicio que dejamos al lector. Demostraremos el recíproco.

Un modo de hacerlo consiste en suponer que $f$ es una solución de la ecuación de ondas, introducir un cambio lineal de variables,

$$x = Au + Bv, \qquad t = Cu + Dv,$$

que transforma $f(x, t)$ en una función de $u$ y $v$,

$$g(u, v) = f(Au + Bv, Cu + Dv),$$

y elegir las constantes $A$, $B$. $C$, $D$ de modo que $g$ satisfaga la ecuación más sencilla

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Resolviendo esta ecuación encontramos que $g(u, v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$, donde $\varphi_1(u)$ es una función de $u$ solamente y donde $\varphi_2(v)$ sólo lo es de $v$. Las constantes $A$, $B$, C, D pueden elegirse de manera que $u = x + ct$, $v = x - ct$, de donde obtenemos

$$f(x, t) = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct). \tag{9.14}$$

Hecho esto utilizamos las condiciones iniciales (9.13) para determinar las funciones $\varphi_1$ y $\varphi_2$ por medio de las funciones dadas $F$ y $G$.

Obtendremos (9.14) por medio de otro método que utiliza el teorema 9.1 y evita el cambio de variables. Escribimos primero la ecuación de ondas en la forma

$$L_1(L_2 f) = 0, \tag{9.15}$$

siendo $L_1$ y $L_2$ operadores diferenciales lineales de primer orden dados por

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}, \qquad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}.$$

Sea $f$ una solución de (9.15) y pongamos

$$u(x, t) = L_2 f(x, t).$$

La ecuación (9.15) establece que $u$ satisface la ecuación de primer orden $L_1(u) = 0$. Luego, según el teorema 9.1 tenemos

$$u(x, t) = \varphi(x + ct)$$

para una cierta función $\varphi$. Sea $\Phi$ una función primitiva de $\varphi$, tal como $\Phi(y) = \int_0^y \varphi(s)ds$, y pongamos

$$v(x, t) = \frac{1}{2c}\Phi(x + ct).$$

Demostraremos que $L_2(v) = L_2(f)$. Tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2c}\Phi'(x + ct) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\Phi'(x + ct),$$

así que

$$L_2 v = \frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'(x + ct) = \varphi(x + ct) = u(x, t) = L_2 f.$$

Es decir, la diferencia $f - v$ satisface la ecuación de primer orden

$$L_2(f - v) = 0.$$

Según el teorema 9.1 debe ser $f(x, t) - v(x, t) = \psi(x - ct)$ para una cierta función $\psi$. Por consiguiente

$$f(x, t) = v(x, t) + \psi(x - ct) = \frac{1}{2c}\Phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Esto demuestra (9.14) poniendo $\varphi_1 = \frac{1}{2c}\Phi$ y $\varphi_2 = \psi$.

Utilicemos ahora las condiciones iniciales (9.13) para determinar las funciones $\varphi_1$ y $\varphi_2$ por medio de las funciones dadas $F$ y $G$. La relación $f(x, 0) = F(x)$ implica

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = F(x). \tag{9.16}$$

La otra condición inicial, $D_2 f(x, 0) = G(x)$, implica

$$c\varphi_1'(x) - c\varphi_2'(x) = G(x). \tag{9.17}$$

Derivando (9.16) obtenemos

$$\varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) = F'(x). \tag{9.18}$$

Resolviendo (9.17) y (9.18) respecto a $\varphi_1'(x)$ y $\varphi_2'(x)$ encontramos

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{2}F'(x) + \frac{1}{2c}G(x), \qquad \varphi_2'(x) = \frac{1}{2}F'(x) - \frac{1}{2c}G(x).$$

Integrando esas relaciones llegamos a

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(0) = \frac{F(x) - F(0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x G(s)\, ds,$$

$$\varphi_2(x) - \varphi_2(0) = \frac{F(x) - F(0)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x G(s)\, ds.$$

Sustituyamos en la primera ecuación $x$ por $x + ct$ y en la segunda $x$ por $x - ct$. Luego sumemos las dos ecuaciones que resulten y teniendo en cuenta que $\varphi_1(0) + \varphi_2(0) = F(0)$ obtenemos

$$f(x, t) = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\, ds.$$

Esto completa la demostración.

EJEMPLO. Supongamos que el desplazamiento inicial viene dado por la fórmula

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x & \text{para} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{para} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

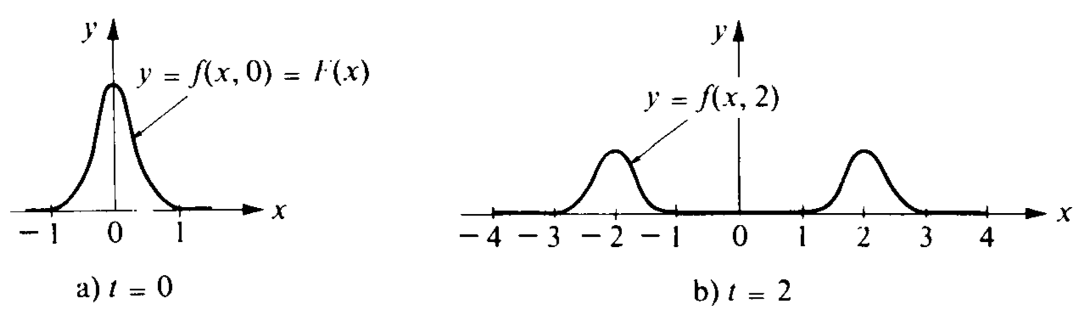



FIGURA 9.2 *Solución de la ecuación de ondas representada para los valores $t = 0$ y $t = 2$.*

La gráfica de $F$ se muestra en las figuras 9.1 a) y 9.2 a). Supongamos que la velocidad inicial $G(x) = 0$ para todo $x$. Entonces la solución que resulta de la ecuación de ondas viene dada por la fórmula

$$f(x, t) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2}.$$

Las figuras 9.1 y 9.2 representan la curva $y = f(x, t)$ para varios valores de t. Las figuras ponen de manifiesto que la solución de la ecuación de ondas es una combinación de dos ondas estacionarias, una que se desplaza hacia la derecha y la otra a la izquierda, cada una con velocidad $c$.

En los ejercicios que siguen se dan ejemplos en los que se utiliza la regla de la cadena en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

## 9.5 Ejercicios

Podemos suponer en estos ejercicios la diferenciabilidad de todas las funciones que se consideran.

1. Si $k$ es una constante positiva y $g(x, t) = \frac{1}{2}x/\sqrt{kt}$, ponemos

$$f(x, t) = \int_0^{g(x,t)} e^{-u^2}\, du .$$

a) Demostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-g^2}\frac{\partial g}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = e^{-g^2}\frac{\partial g}{\partial t} .$$

b) Demostrar que $f$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad \textit{(ecuación del calor)}.$$

2. Consideremos un campo escalar $f$ definido en $\mathbf{R}^2$ tal que $f(x, y)$ dependa sólo de la distancia $r$ del punto $(x, y)$ al origen, $f(x, y) = g(r)$, siendo $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

a) Demostrar que para $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r}g'(r) + g''(r) .$$

b) Supongamos además que $f$ satisface la *ecuación de Laplace,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 ,$$

para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Demostrar, aplicando la parte a) que $f(x, y) = a \log (x^2 + y^2) + b$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, siendo $a$ y $b$ constantes.

3. Repetir el ejercicio 2 en el caso $n$-dimensional, siendo $n \geq 3$. Esto es, supóngase que $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = g(r)$, siendo $r = \|x\|$. Demostrar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \frac{n-1}{r}g'(r) + g''(r)$$

para $x \neq O$. Si $f$ satisface la *ecuación de Laplace n-dimensional,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0,$$

para todo $x \neq O$, deducir que $f(x) = a\,\|x\|^{2-n} + b$ para $x \neq O$, siendo $a$ y $b$ constantes.

*Observación:* El operador lineal $\nabla^2$ definido por la ecuación

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

se llama *laplaciana n-dimensional.*

4. *Laplaciana bi-dimensional en coordenadas polares.* La introducción de coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, transforma $f(x,y)$ en $g(r,\theta)$. Comprobar las siguientes fórmulas:

a) $$\|\nabla f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\|^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$$

b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}.$$

5. *Laplaciana tridimensional en coordenadas esféricas.* La introducción de coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi,$$

transforma $f(x,y,z)$ en $F(\rho,\theta,\varphi)$. Este ejercicio indica cómo hay que proceder para expresar la laplaciana $\nabla^2 f$ en función de las derivadas parciales de $F$.

a) Introducir primero las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ para transformar $f(x,y,z)$ en $g(r,\theta,z)$. Utilizar el ejercicio 4 para demostrar que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

b) Transformar luego $g(r,\theta,z)$ en $F(\rho,\theta,\varphi)$ tomando $z = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\operatorname{sen}\varphi$. Obsérvese que, salvo un cambio de notación, esta transformación es la misma que la utilizada en la parte a). Deducir

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

6. Este ejercicio pone de manifiesto que la ecuación de Legendre aparece cuando buscamos soluciones de la ecuación de Laplace que tengan una forma especial. Sea $f$ un campo escalar que satisfaga la ecuación de Laplace tri-dimensional, $\nabla^2 f = 0$. Introduzcamos coordenadas esféricas como en el ejercicio 5 y pongamos $F(\rho,\theta,\varphi) = f(x,y,z)$.

a) Supongamos que buscamos soluciones $f$ de la ecuación de Laplace tales que $F(\rho, \theta, \varphi)$ sean independientes de $\theta$ y tengan la forma particular $F(\rho, \theta, \varphi) = \rho^n G(\varphi)$. Demostrar que $f$ satisface la ecuación de Laplace si $G$ satisface la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2G}{d\varphi^2} + \cot\varphi \frac{dG}{d\varphi} + n(n+1)G = 0.$$

b) El cambio de variable $x = \cos\varphi$ ($\varphi = \arccos x$, $-1 \le x \le 1$) transforma $G(\varphi)$ en $g(x)$. Demostrar que $g$ satisface la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)\frac{d^2g}{dx^2} - 2x\frac{dg}{dx} + n(n+1)g = 0.$$

7. *Ecuación bi-dimensional de ondas.* Una membrana delgada y flexible está extendida sobre el plano $xy$ y puede vibrar. Designemos con $z = f(x, y, t)$ el desplazamiento vertical de la membrana en el punto $(x, y)$ en el instante $t$. Ciertas consideraciones físicas sugieren que $f$ satisface la ecuación bi-dimensional de ondas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

en la que $c$ es una constante positiva que depende de las características físicas de la membrana. Este ejercicio revela una conexión entre esta ecuación y la ecuación diferencial de Bessel.

a) Introducir coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, y pongamos $F(r, \theta, t) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, t)$. Si $f$ satisface la ecuación de ondas demostrar que $F$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right).$$

b) Si $F(r, \theta, t)$ es independiente de $\theta$, $F(r, \theta, t) = \varphi(r, t)$ la ecuación a) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right).$$

Sea ahora $\varphi$ una solución tal que $\varphi(r, t)$ se escinde en el producto de una función de $r$ por una función de $t$, $\varphi(r, t) = R(r)T(t)$. Demostrar que cada una de las funciones $R$ y $T$ satisface una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

c) Si la función $T$ del apartado b) es periódica de período $2\pi/c$, demostrar que $R$ satisface la ecuación de Bessel $r^2R'' + rR' + r^2R = 0$.

## 9.6 Derivación de funciones definidas implícitamente

Algunas superficies en el espacio de tres dimensiones se representan por ecuaciones cartesianas de la forma

$$F(x, y, z) = 0.$$

Una ecuación como ésta, decimos, proporciona una *representación implícita* de la superficie. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ representa la superficie de una esfera unidad con centro en el origen. Algunas veces es posible despejar en la ecuación $F(x, y, z) = 0$ una de las variables en función de las otras dos, por ejemplo $z$ en función de $x$ e $y$. Esto nos conduce a una o varias ecuaciones de la forma

$$z = f(x, y).$$

Para la esfera tenemos dos soluciones,

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{y} \qquad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

una representa la semiesfera superior, la otra la semiesfera inferior.

En general no resulta sencillo obtener una fórmula explícita para $z$ en función de $x$ e $y$. Por ejemplo, no hay un método para despejar con facilidad $z$ en la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$. Sin embargo, utilizando en forma adecuada la regla de la cadena se pueden deducir varias propiedades de las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ sin un conocimiento explícito de $f(x, y)$. En esta sección se expone dicho método.

Supongamos que existe una función $f(x, y)$ tal que

$$F[x, y, f(x, y)] = 0 \tag{9.19}$$

para todo $(x, y)$ en un cierto conjunto abierto $S$, y que no sea posible disponer de fórmulas explícitas para calcular $f(x, y)$. Expresemos ésta diciendo que $F(x, y, z) = 0$ define $z$ *implícitamente* como función de $x$ e $y$, y escribamos

$$z = f(x, y).$$

Introduzcamos ahora una función auxiliar $g$ definida en $S$ como sigue:

$$g(x, y) = F[x, y, f(x, y)].$$

La ecuación (9.19) establece que $g(x, y) = 0$ en $S$; luego las derivadas parciales $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ son también 0 en $S$. Pero también podemos calcular esas derivadas parciales mediante la regla de la cadena. Para ello escribamos

$$g(x, y) = F[u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)],$$

siendo $u_1(x, y) = x$, $u_2(x, y) = y$, y $u_3(x, y) = f(x, y)$. La regla de la cadena nos da las fórmulas

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1F\frac{\partial u_1}{\partial x} + D_2F\frac{\partial u_2}{\partial x} + D_3F\frac{\partial u_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = D_1F\frac{\partial u_1}{\partial y} + D_2F\frac{\partial u_2}{\partial y} + D_3F\frac{\partial u_3}{\partial y},$$

en las que cada derivada parcial $D_kF$ está calculada en $(x, y, f(x, y))$. Puesto que tenemos

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

la primera de las ecuaciones anteriores se transforma en

$$D_1F + D_3F\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Resolviéndola respecto a $\partial f/\partial x$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{D_1F[x, y, f(x, y)]}{D_3F[x, y, f(x, y)]} \tag{9.20}$$

en los puntos en los que $D_3F[x, y, f(x, y)] \neq 0$. Mediante un razonamiento parecido obtenemos una fórmula análoga para $\partial f/\partial y$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{D_2F[x, y, f(x, y)]}{D_3F[x, y, f(x, y)]} \tag{9.21}$$

en los puntos en los que $D_3F[x, y, f(x, y)] \neq 0$. Ordinariamente esas fórmulas se escriben más brevemente así:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

EJEMPLO. Supongamos que la ecuación $y^2 + xz + z^z - e^z - c = 0$ define $z$ como función de $x$ e $y$, sea ésta $z = f(x, y)$. Hallar un valor de la constante $c$ para el cual $f(0, e) = 2$, y calcular las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en el punto $(x, y) = (0, e)$.

*Solución.* Cuando $x = 0$, $y = e$ y $z = 2$ la ecuación toma la forma $e^2 + 4 - e^2 - c = 0$, y ésta se satisface para $c = 4$. Sea $F(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$. De (9.20) y (9.21) obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z}{x + 2z - e^z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{x + 2z - e^z}.$$

Cuando $x = 0$, $y = e$, y $z = 2$ encontramos $\partial f/\partial x = 2/(e^2 - 4)$ y $\partial f/\partial y = 2e/(e^2 - 4)$. Obsérvese que hemos podido calcular las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ utilizando tan sólo el valor de $f(x, y)$ en el punto $(0, e)$.

La discusión anterior puede extenderse a funciones de más de dos variables.

TEOREMA 9.3. *Si $F$ es un campo escalar diferenciable en un conjunto abierto $T$ de $\mathbf{R}^n$ y si suponemos que la ecuación*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

*define implícitamente $x_n$ como función diferenciable de $x_1, \ldots, x_{n-1}$*

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

*para todos los puntos $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ en un cierto conjunto $S$ de $\mathbf{R}^{n-1}$, entonces para cada $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, la derivada parcial $D_k f$ viene dada por la fórmula*

$$D_k f = -\frac{D_k F}{D_n F} \tag{9.22}$$

*en los puntos en los que $D_n F \neq 0$. Las derivadas parciales $D_k F$ y $D_n F$ que aparecen en (9.22) están calculadas en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}))$.*

La demostración es una extensión directa del razonamiento utilizado para deducir las ecuaciones (9.20) y (9.21) y la dejamos para el lector.

La discusión puede generalizarse en otro sentido. Supongamos dos superficies con las representaciones implícitas siguientes:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0. \tag{9.23}$$

Si esas superficies se cortan a lo largo de una curva $C$, es posible obtener una representación paramétrica de $C$ resolviendo las dos ecuaciones (9.23) simultáneamente respecto a dos de las variables en función de la tercera, por ejemplo $x$ e $y$ en función de $z$. Supongamos que sea posible despejar $x$ e $y$ y que las soluciones vengan dadas por las ecuaciones

$$x = X(z), \qquad y = Y(z)$$

para todo $z$ en un cierto intervalo abierto $(a, b)$ Entonces cuando $x$ e $y$ se reemplazan por $X(z)$ e $Y(z)$, respectivamente, las dos ecuaciones (9.23) se satisfacen idénticamente. Esto es, podemos escribir $F[X(z), Y(z), z] = 0$ y $G[X(z), Y(z), z] = 0$ para todo $z$ de $(a, b)$. Volviendo a usar la regla de la cadena, podemos calcular las derivadas $X'(z)$ e $Y'(z)$ sin un conocimiento explícito de $X(z)$ e $Y(z)$. Introduzcamos para ello dos nuevas funciones $f$ y $g$ por medio de las ecuaciones

$$f(z) = F[X(z), Y(z), z] \qquad \text{y} \qquad g(z) = G[X(z), Y(z), z].$$

Entonces $f(z) = g(z) = 0$ para todo $z$ de $(a, b)$ y por tanto las derivadas $f'(z)$ y $g'(z)$ también son cero en $(a, b)$. Con la regla de la cadena esas derivadas se expresan con las fórmulas

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F}{\partial y} Y'(z) + \frac{\partial F}{\partial z}, \qquad g'(z) = \frac{\partial G}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial G}{\partial y} Y'(z) + \frac{\partial G}{\partial z}.$$

Puesto que $f'(z)$ y $g'(z)$ son ambas cero podemos determinar $X'(z)$ e $Y'(z)$ resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones *lineales:*

$$\frac{\partial F}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F}{\partial y} Y'(z) = -\frac{\partial F}{\partial z},$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial G}{\partial y} Y'(z) = -\frac{\partial G}{\partial z}.$$

En aquellos puntos en los que el determinante del sistema no es nulo, el sistema tiene una sola solución que, mediante la regla de Cramer, se puede expresar así:

(9.24)
$$X'(z) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}, \qquad Y'(z) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

Los determinantes que aparecen en (9.24) son determinantes de matrices de Jacobi y se llaman *determinantes jacobianos*. Con frecuencia se emplea una notación especial para los determinantes jacobianos. Escribimos

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Con esta notación, las fórmulas (9.24) pueden expresarse más brevemente en la forma

$$X'(z) = \frac{\partial(F, G)/\partial(y, z)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)}, \qquad Y'(z) = \frac{\partial(F, G)/\partial(z, x)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)}. \tag{9.25}$$

(El signo menos se ha incorporado a los numeradores permutando las columnas.)

El método se puede extender a casos más generales en los que se dan $m$ ecuaciones con $n$ variables, siendo $n > m$ obteniéndose $m$ variables en función de las $n - m$ restantes. Las derivadas parciales de las nuevas funciones así definidas se pueden expresar como cocientes de determinantes de Jacobi, generalizando así (9.25). En el ejercicio 3 de la sección 9.8 se da un ejemplo en el que $m = 2$ y $n = 4$.

## 9.7 Ejemplos resueltos

En esta sección ilustramos algunos de los conceptos de la anterior resolviendo algunos problemas relativos a funciones definidas implícitamente.

EJEMPLO 1. Supongamos que la ecuación $g(x, y) = 0$ determina $y$ como función derivable de $x$, sea ésta $y = Y(x)$ para todo $x$ en un cierto intervalo $(a, b)$. Expresar la derivada $Y'(x)$ en función de las derivadas parciales de $g$.

*Solución.* Sea $G(x) = g[x, Y(x)]$ para $x$ en $(a, b)$. Entonces la ecuación $g(x, y) = 0$ implica $G(x) = 0$ en $(a, b)$. En virtud de la regla de la cadena tenemos

$$G'(x) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial y} Y'(x),$$

de la que obtenemos

$$Y'(x) = -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} \tag{9.26}$$

en los puntos $x$ de $(a, b)$ en los que $\partial g/\partial y \neq 0$. Las derivadas parciales $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ vienen dadas por las fórmulas $\partial g/\partial x = D_1 g[x, Y(x)]$ y $\partial g/\partial y = D_2 g[x, Y(x)]$.

EJEMPLO 2. Cuando se elimina $y$ entre las dos ecuaciones $z = f(x, y)$ y $g(x, y) = 0$, el resultado puede expresarse en la forma $z = h(x)$. Expresar la derivada $h'(x)$ en función de las derivadas parciales de $f$ y $g$.

*Solución.* Supongamos que la ecuación $g(x, y) = 0$ puede resolverse respecto a $y$ en función de $x$ y que una solución sea $y = Y(x)$ para todos los valores de $x$ de un cierto intervalo abierto $(a, b)$. Entonces la función $h$ será

$$h(x) = f[x, Y(x)] \qquad \text{si} \quad x \in (a, b).$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} Y'(x).$$

Con la ecuación (9.26) del ejemplo 1 obtenemos la fórmula

$$h'(x) = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}.$$

Las derivadas parciales del segundo miembro están calculadas en el punto $(x, Y(x))$. Obsérvese que el numerador también puede expresarse como un determinante jacobiano, resultando

$$h'(x) = \frac{\partial(f, g)/\partial(x, y)}{\partial g/\partial y}.$$

EJEMPLO 3. Las dos ecuaciones $2x = v^2 - u^2$ e $y = uv$ definen $u$ y $v$ como funciones de $x$ e $y$. Hallar las fórmulas correspondientes a $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$.

*Solución.* Si mantenemos fija $y$ y derivamos las dos ecuaciones citadas con respecto a $x$, recordando que $u$ y $v$ son funciones de $x$ e $y$, obtenemos

$$2 = 2v\frac{\partial v}{\partial x} - 2u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad 0 = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Resolviendo estas ecuaciones respecto a $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$ encontramos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{u^2 + v^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Por otra parte, si mantenemos fija $x$ y derivamos las dos ecuaciones dadas respecto a $y$ obtenemos las ecuaciones

$$0 = 2v\frac{\partial v}{\partial y} - 2u\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad 1 = u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}.$$

De este sistema de dos ecuaciones obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{u^2 + v^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

EJEMPLO 4. Sea $u$ una función de $x$ e $y$ definida por la ecuación

$$u = F(x + u, yu).$$

Hallar $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ en función de las derivadas parciales de $F$.

*Solución.* Supongamos que $u = g(x, y)$ para todo $(x, y)$ en un cierto conjunto abierto $S$. Sustituyendo $g(x,y)$ por $u$ en la ecuación original obtenemos

$$g(x, y) = F[u_1(x, y), u_2(x, y)], \tag{9.27}$$

en donde $u_1(x, y) = x + g(x, y)$ y $u_2(x, y) = y\, g(x, y)$. Mantengamos ahora $y$ fija y derivemos ambos miembros de (9.27) respecto a $x$, empleando la regla de la cadena en el segundo miembro, con lo que obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1F\frac{\partial u_1}{\partial x} + D_2F\frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{9.28}$$

Pero $\partial u_1/\partial x = 1 + \partial g/\partial x$, y $\partial u_2/\partial x = y\,\partial g/\partial x$. Luego (9.28) se convierte en

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1F\cdot\left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}\right) + D_2F\cdot\left(y\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Resolviendo esta ecuación respecto a $\partial g/\partial x$ (y poniendo $\partial u/\partial x$ en lugar de $\partial g/\partial x$) obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-D_1F}{D_1F + y\, D_2F - 1}.$$

Del mismo modo encontramos

$$\frac{\partial g}{\partial y} = D_1F\,\frac{\partial u_1}{\partial y} + D_2F\,\frac{\partial u_2}{\partial y} = D_1F\,\frac{\partial g}{\partial y} + D_2F\left(y\,\frac{\partial g}{\partial y} + g(x, y)\right).$$

Esto nos conduce a la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-g(x, y)\, D_2F}{D_1F + y\, D_2F - 1}.$$

Las derivadas parciales $D_1F$ y $D_2F$ están calculadas en el punto $(x + g(x, y), yg(x, y))$.

EJEMPLO 5. Cuando $u$ se elimina entre las dos ecuaciones $x = u + v$ e $y = uv^2$ llegamos a una ecuación de la forma $F(x, y, v) = 0$ que define implícitamente $v$ como función de $x$ e $y$, sea $v = h(x, y)$. Demostrar que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x, y)}{3h(x, y) - 2x}$$

y encontrar una fórmula análoga para $\partial h/\partial y$.

*Solución.* Eliminando $u$ entre las dos ecuaciones dadas, obtenemos la relación

$$xv^2 - v^3 - y = 0.$$

Sea $F$ la función definida por la ecuación

$$F(x, y, v) = xv^2 - v^3 - y.$$

Podemos aplicar ahora lo dicho en la sección 9.6 y escribir

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial v}. \tag{9.29}$$

Pero $\partial F/\partial x = v^2$, $\partial F/\partial v = 2xv - 3v^2$ y $\partial F/\partial y = -1$. Luego las fórmulas (9.29) se convierten en

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{v^2}{2xv - 3v^2} = -\frac{v}{2x - 3v} = \frac{h(x, y)}{3h(x, y) - 2x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{-1}{2xv - 3v^2} = \frac{1}{2xh(x, y) - 3h^2(x, y)}.$$

EJEMPLO 6. La ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente $z$ como función de $x$ e $y$, sea $z = f(x, y)$. Suponiendo que $\partial^2 F/(\partial x\, \partial z) = \partial^2 F/(\partial z\, \partial x)$, demostrar que tenemos

$$\text{(9.30)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial z}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^3},$$

donde las derivadas parciales del segundo miembro están calculadas en $(x, y, f(x, y))$.

*Solución.* Según la fórmula (9.20) de la sección 9.6 tenemos,

$$\text{(9.31)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}.$$

Hay que recordar que este cociente significa en realidad

$$-\frac{D_1 F[x, y, f(x, y)]}{D_3 F[x, y, f(x, y)]}.$$

Introduzcamos $G(x, y) = D_1 F[x, y, f(x, y)]$ y $H(x, y) = D_3 F[x, y, f(x, y)]$. Nos proponemos calcular la derivada parcial respecto a $x$ del cociente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{G(x, y)}{H(x, y)},$$

manteniendo la $y$ fija. Aplicando la regla de la derivación de un cociente resulta,

$$\text{(9.32)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{H\dfrac{\partial G}{\partial x} - G\dfrac{\partial H}{\partial x}}{H^2}.$$

Puesto que $G$ y $H$ son funciones compuestas, usamos la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales $\partial G/\partial x$ y $\partial H/\partial x$. Para $\partial G/\partial x$ tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= D_1(D_1F)\cdot 1 + D_2(D_1F)\cdot 0 + D_3(D_1F)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

Análogamente, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= D_1(D_3F)\cdot 1 + D_2(D_3F)\cdot 0 + D_3(D_3F)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en (9.32) y reemplazando $\partial f/\partial x$ por el cociente (9.31) obtenemos la fórmula (9.30).

## 9.8 Ejercicios

En los ejercicios de esta sección se supone la existencia y la continuidad de todas las derivadas que intervienen.

1. Las dos ecuaciones $x + y = uv$ y $xy = u - v$ definen $x$ e $y$ como funciones implícitas de $u$ y $v$, sean éstas $x = X(u, v)$ e $y = Y(u, v)$. Demostrar que $\partial X/\partial u = (xv - 1)/(x - y)$ si $x \neq y$, y hallar fórmulas parecidas para $\partial X/\partial v$, $\partial Y/\partial u$, $\partial Y/\partial v$.
2. Las dos ecuaciones $x + y = uv$ y $xy = u - v$ definen $x$ y $v$ como funciones de $u$ e $y$, sean éstas $x = X(u, y)$ y $v = V(u, y)$. Demostrar que $\partial X/\partial u = (u + v)/(1 + yu)$ si $1 + yu \neq 0$, y hallar las fórmulas de $\partial X/\partial y$, $\partial V/\partial u$, $\partial V/\partial y$.
3. Las dos ecuaciones $F(x, y, u, v) = 0$ y $G(x, y, u, v) = 0$ determinan $x$ e $y$ como funciones implícitas de $u$ y $v$, sean éstas $x = X(u, v)$ e $y = Y(u, v)$. Demostrar que
$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial(F, G)/\partial(y, u)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)}$$
en los puntos en los que el jacobiano $\partial(F, G)/\partial(x, y) \neq 0$, y hallar las fórmulas para las derivadas parciales $\partial X/\partial v$, $\partial Y/\partial u$ y $\partial Y/\partial v$.
4. La intersección de las dos superficies dadas por las ecuaciones cartesianas $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$ contiene una curva $C$ que pasa por el punto $P = (\sqrt{7}, 3, 4)$. Esas ecuaciones pueden resolverse respecto a $x$ e $y$ en función de $z$ con lo que se obtiene la representación paramétrica de $C$ con $z$ como parámetro.
a) Hallar un vector unitario $T$ tangente a $C$ en el punto $P$ sin utilizar el conocimiento explícito de la representación paramétrica.
b) Confrontar el resultado del apartado anterior a) mediante la representación paramétrica de $C$ con $z$ como parámetro.

5. Las tres ecuaciones $F(u, v) = 0$, $u = xy$ y $v = \sqrt{x^2 + z^2}$ definen una superficie en el espacio $xyz$. Hallar un vector normal a esa superficie en el punto $x = 1$, $y = 1$, $z = \sqrt{3}$ si se sabe que $D_1F(1, 2) = 1$ y $D_2F(1, 2) = 2$.
6. Las tres ecuaciones

$$x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 = 2,$$

$$xy - \operatorname{sen} u \cos v + z = 0,$$

definen $x, y, z$ como funciones de $u$ y $v$. Calcular las *derivadas parciales* $\partial x/\partial u$ y $\partial x/\partial v$ en el punto $x = y = 1$, $u = \pi/2$, $v = 0$, $z = 0$.
7. La ecuación $f(y/x, z/x) = 0$ define $z$ implícitamente como función de $x$ e $y$, sea esa función $z = g(x, y)$. Demostrar que

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = g(x, y)$$

en los puntos en los que $D_2f[y/x, g(x, y)/x]$ es distinta de cero.
8. Sea $F$ una función real de dos variables reales y supongamos que las derivadas parciales $D_1F$ y $D_2F$ son siempre distintas de cero. Sea $u$ otra función real de dos variables reales tales que las derivadas parciales $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ están ligadas por la ecuación $F(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0$. Demostrar que existe una constante $n$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^n,$$

y encontrar $n$. Suponer que $\partial^2 u/(\partial x\, \partial y) = \partial^2 u/(\partial y\, \partial x)$.
9. La ecuación $x + z + (y + z)^2 = 6$ define $z$ como función implícita de $x$ e $y$, sea $z = f(x, y)$. Calcular las derivadas parciales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, y $\partial^2 f/(\partial x\, \partial y)$ en función de $x, y$, y $z$.
10. La ecuación $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(y + z) = 1$ define $z$ como función implícita de $x$ e $y$, sea $z = f(x, y)$. Calcular la derivada segunda $D_{1,2}f$ en función de $x, y$, y $z$.
11. La ecuación $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ define $z$ como función implícita de $x$ e $y$, sea $z = f(x, y)$. Determinar las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en función de las parciales $D_1F$ y $D_2F$.
12. Sean $f$ y $g$ dos funciones de una variable real y definamos $F(x, y) = f[x + g(y)]$. Hallar las fórmulas correspondientes a todas las derivadas parciales de $F$ de primero y segundo orden, expresadas en función de las derivadas de $f$ y $g$. Comprobar la relación

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

## 9.9 Máximos, mínimos y puntos de ensilladura

Una superficie definida explícitamente por una ecuación de la forma

$z = f(x, y)$ puede considerarse como una superficie de nivel del campo escalar $F$ definido por la ecuación

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z .$$

Si $f$ es diferenciable, el gradiente de ese campo viene dado por el vector

$$\nabla F = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} .$$

La ecuación lineal que representa el plano tangente en un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ puede escribirse en la forma

$$z - z_1 = A(x - x_1) + B(y - y_1) ,$$

en la que

$$A = D_1 f(x_1, y_1) \qquad \text{y} \qquad B = D_2 f(x_1, y_1) .$$

Cuando los dos coeficientes $A$ y $B$ son nulos, el punto $P_1$ se llama *punto estacionario* de la superficie y el punto $(x_1, y_1)$ se llama *punto estacionario* o *crítico* de la función $f$. El plano tangente en un punto estacionario es horizontal. Generalmente los puntos estacionarios de una superficie se clasifican en tres categorías: máximos, mínimos y puntos de ensilladura. Si la superficie se imagina como un terreno montañoso, esas categorías corresponden, respectivamente, a las cumbres, a los fondos de los valles y a los puertos.

Los conceptos de máximos, mínimos y puntos de ensilladura, se pueden introducir para campos escalares cualesquiera definidos en subconjuntos de $\mathbf{R}^n$.

DEFINICIÓN. *Se dice que un campo escalar $f$ tiene un máximo absoluto en un punto $\boldsymbol{a}$ de un conjunto $S$ de $\mathbf{R}^n$ si*

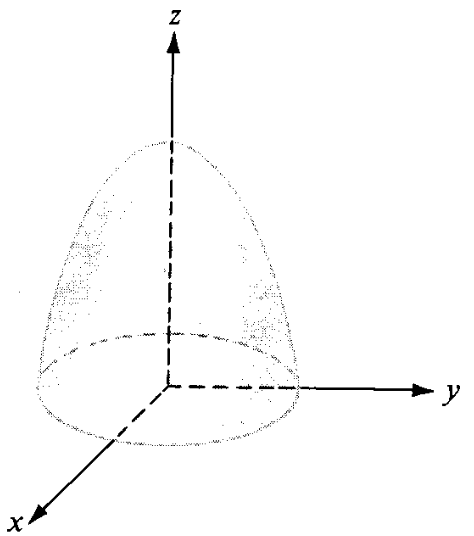
$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}) \tag{9.33}$$

*para todo $\boldsymbol{x}$ de $S$. El número $f(\boldsymbol{a})$ se llama máximo absoluto de $f$ en $S$. Se dice que la función $f$ tiene un máximo relativo en $\boldsymbol{a}$ si la desigualdad* (9.33) *se satisface para todo $\boldsymbol{x}$ de una cierta n-bola $B(\boldsymbol{a})$ contenida en $S$.*

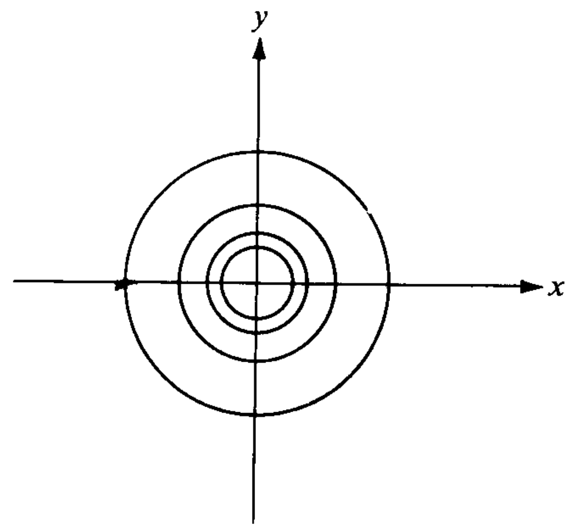
Dicho de otro modo, un máximo relativo en $\boldsymbol{a}$ es el máximo absoluto en un cierto entorno de $\boldsymbol{a}$. El *mínimo absoluto* y el *mínimo relativo* se definen de modo parecido, empleando la desigualdad opuesta a la (9.33). Algunas veces se emplean los adjetivos *global* y *local* en lugar de *absoluto* y *relativo* respectivamente.

DEFINICIÓN. *Un número que sea máximo relativo o mínimo relativo de $f$ se llama extremo de $f$.*

Si $f$ tiene un extremo en un punto interior $\boldsymbol{a}$ y es diferenciable en él, todas las derivadas parciales de primer orden $D_1f(\boldsymbol{a}), \ldots, D_nf(\boldsymbol{a})$ deben ser cero. Es decir, $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$ (Esto se puede probar fácilmente manteniendo fijo cada componente y reduciendo el problema al caso uni-dimensional). En el caso $n = 2$, esto significa que hay un plano horizontal tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el

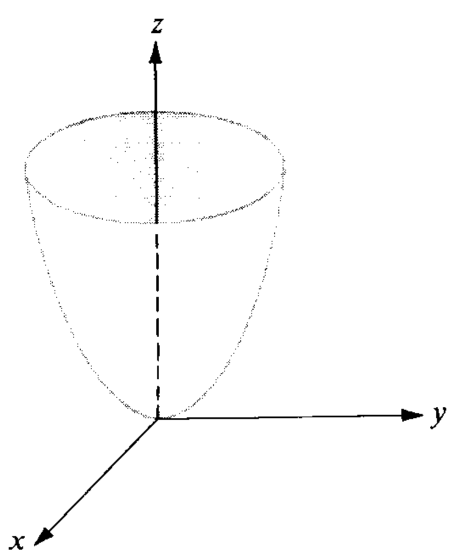



a) $z = 2 - x^2 - y^2$




b) *Curvas de nivel:* $x^2 + y^2 = c$

*Ejemplo 1. Máximo relativo en el origen.*




c) $z = x^2 + y^2$

*Ejemplo 2. Mínimo relativo en el origen.*

FIGURA 9.3 *Ejemplos 1 y 2.*

punto $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$. Por otra parte, es sencillo encontrar ejemplos en los que la anulación de todas las derivadas parciales en $\boldsymbol{a}$ no implica necesariamente un extremo en $\boldsymbol{a}$. Esto sucede en los llamados *puntos de ensilladura* que se definen del modo siguiente.

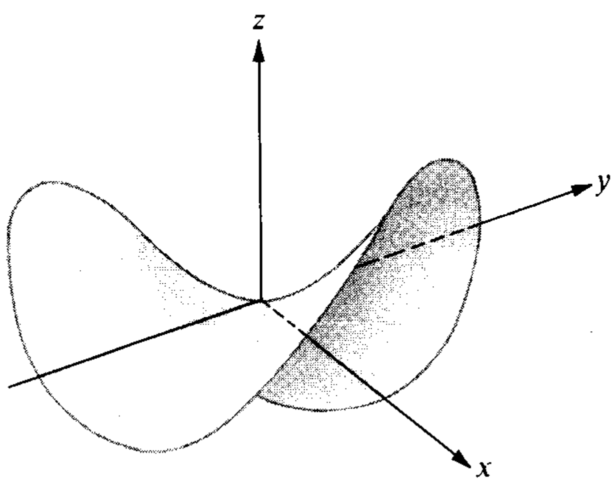
DEFINICIÓN. *Supongamos que $f$ sea diferenciable en $\boldsymbol{a}$. Si $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$ el punto $\boldsymbol{a}$ se llama punto estacionario de $f$. Un punto estacionario se llama de ensilladura si toda n-bola $B(\boldsymbol{a})$ contiene puntos $\boldsymbol{x}$ tales que $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a})$ y otros para los que $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$.*

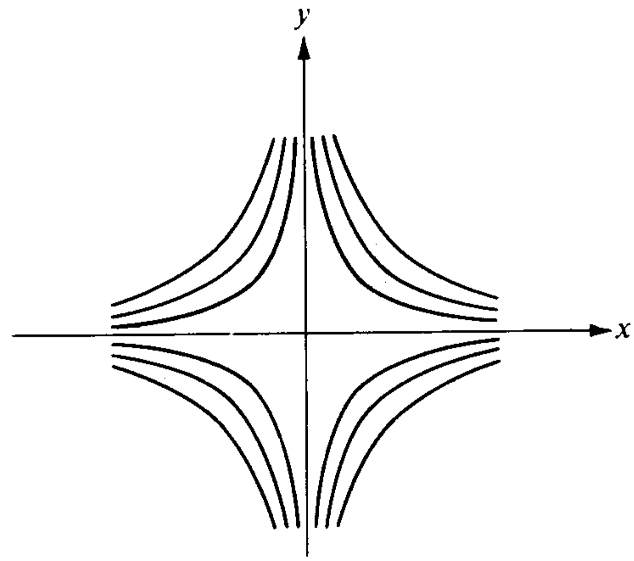
La definición es análoga a la del caso uni-dimensional en el que los puntos estacionarios de una función se clasifican en máximos, mínimos y puntos de inflexión. En los ejemplos que siguen se consideran varios tipos de puntos estacionarios. En cada caso el punto estacionario que se considera es el origen.

EJEMPLO 1. *Máximo relativo.* $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. Esta superficie es un paraboloide de revolución. En las proximidades del origen tiene la forma indicada en la figura 9.3 a). Sus curvas de nivel son círculos, alguno de los cuales está dibujado en la figura 9.3 b). Puesto que $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2) \leqslant 2 = f(0, 0)$ para todo $(x, y)$, resulta que $f$ no tan sólo tiene en $(0, 0)$ un máximo relativo, sino también un máximo *absoluto* en todo conjunto que contenga el origen. Las dos derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se anulan en el origen.

EJEMPLO 2. *Mínimo relativo.* $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Este ejemplo, otro paraboloide de revolución, es en esencia el mismo que el ejemplo anterior, salvo que en el origen hay un mínimo en lugar de un máximo. El aspecto de la superficie en las cercanías del origen se aprecia en la figura 9.3 c) y algunas curvas de nivel están dibujadas en la figura 9.3 b).

EJEMPLO 3. *Punto de ensilladura.* $z = f(x, y) = xy$. Esta superficie es un paraboloide hiperbólico. Cerca del origen es parecida a una silla de montar, como se ve en la figura 9.4 (a). Las dos derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son nulas en el origen pero no existe en él ni máximo ni mínimo. En efecto, para puntos $(x, y)$ del primero o tercer cuadrantes, $x$ e $y$ tienen el mismo signo, dándonos $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$, mientras que para puntos del segundo y cuarto cuadrantes $x$ e $y$ tienen signos opuestos, y es $f(x, y) < 0 = f(0,0)$. Por consiguiente, en todo entorno del origen hay puntos en los que la función es menor que $f(0, 0)$ y puntos en los que es mayor que $f(0, 0)$, de modo que el origen es un punto de ensilladura. En la figura 9.4 b), se representa también el punto de ensilladura y las curvas de nivel en las proximidades de $(0, 0)$. Esas son hipérbolas que tienen los ejes $x$ e $y$ como asíntotas.

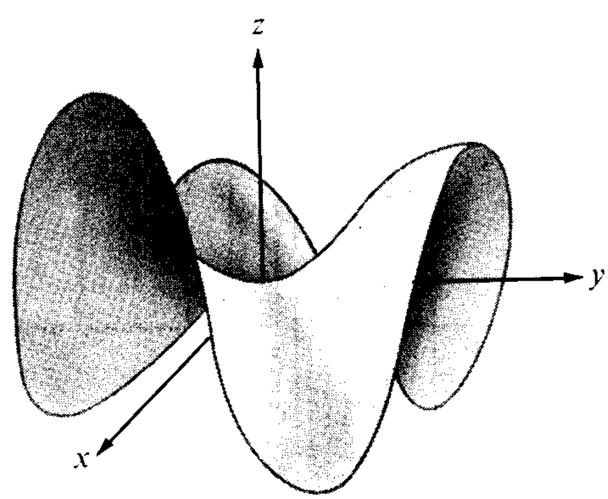


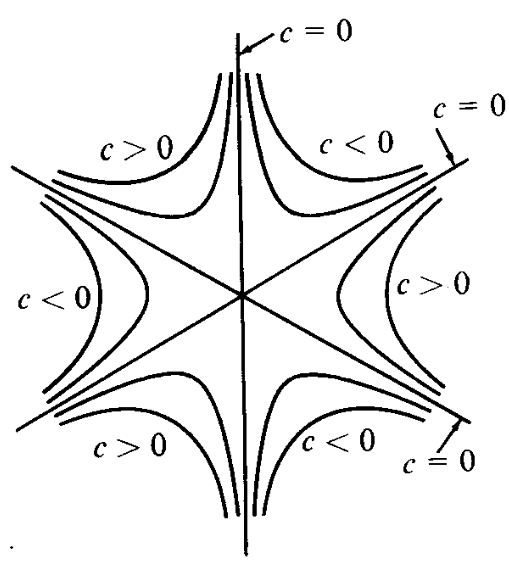




a) $z = xy$ b) *Curvas de nivel:* $xy = c$

FIGURA 9.4 *Ejemplo 3. Punto de ensilladura en el origen.*

EJEMPLO 4. *Punto de ensilladura.* $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Cerca del origen, esta superficie tiene el aspecto de un puerto de montaña entre tres picos. Está representada en la figura 9.5 a). Algunas curvas de nivel se ven en la figura 9.5 b). El punto de ensilladura está en el origen.

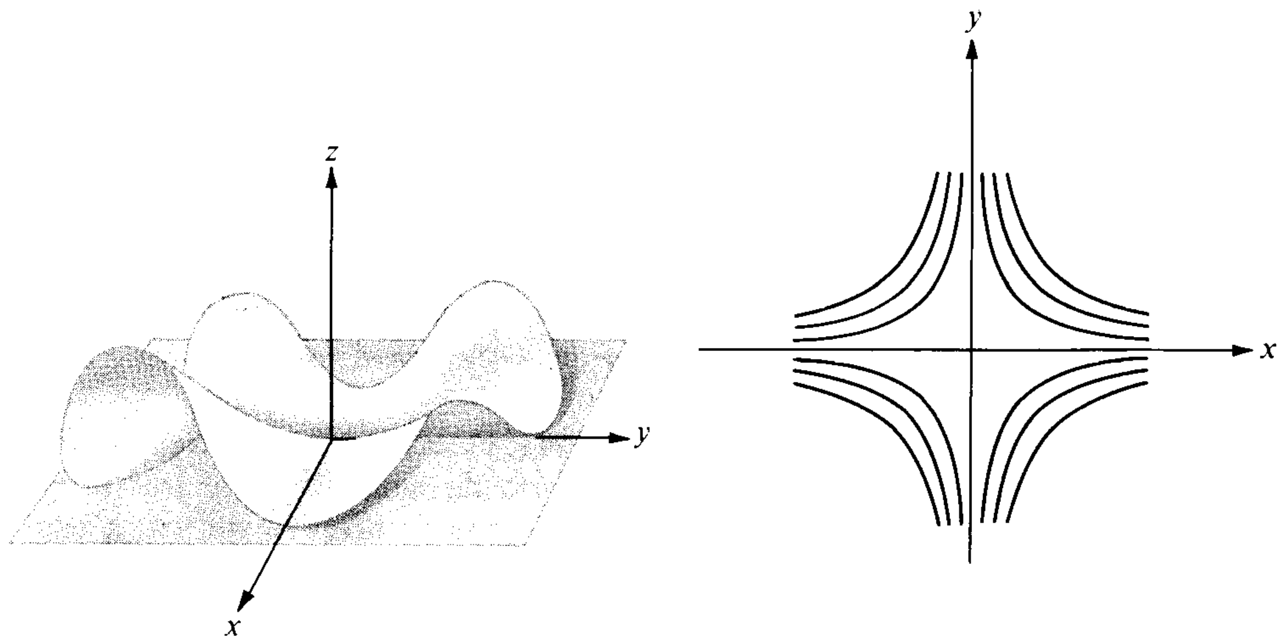



a) $z = x^3 - 3xy^2$. b) *Curvas de nivel:* $x^3 - 3xy^2 = c$.

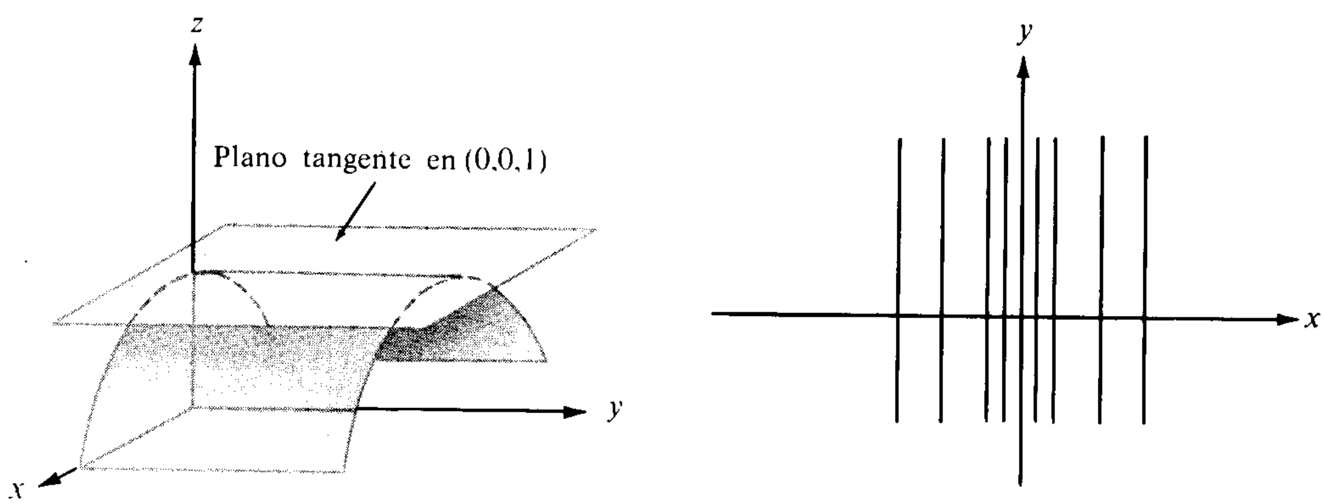
FIGURA 9.5 *Ejemplo 4. Punto de ensilladura en el origen.*

EJEMPLO 5. *Mínimo relativo.* $z = f(x, y) = x^2y^2$. Esta superficie se parece a un valle circundado por cuatro montañas, como sugiere la figura 9.6 a). Existe un mínimo absoluto en el origen, ya que $f(x, y) \geqslant (f(0, 0)$ para todo $(x, y)$. Las curvas de nivel [representadas en la figura 9.6 b)] son hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes $x$ e $y$. Obsérvese que esas curvas de nivel son parecidas a las del ejercicio 3. En este caso, no obstante, la función toma únicamente valores no negativos a lo largo de todas sus curvas de nivel.




a) $z = x^2y^2$ b) Curvas de nivel: $x^2y^2 = c$

FIGURA 9.6 *Ejemplo 5. Mínimo relativo en el origen.*




a) $z = 1 - x^2$ b) Curvas de nivel: $1 - x^2 = c$

FIGURA 9.7 *Ejemplo 6. Máximo relativo en el origen.*

EJEMPLO 6. *Máximo relativo.* $z = (f(x, y) = 1 - x^2$. En este caso la superficie es un cilindro con generatrices paralelas al eje $y$, como muestra la figura 9.7 a). Las secciones por planos paralelos al eje $x$ son parábolas. Es evidente que existe un máximo absoluto en el origen debido a que $f(x, y) = 1 - x^2 \leqslant 1 = f(0, 0)$ para todo $(x, y)$. Las curvas de nivel forman una familia de rectas paralelas como se ve en la figura 9.7 b).

## 9.10 Fórmula de Taylor de segundo orden para campos escalares

Si un campo escalar diferenciable $f$ tiene un punto estacionario en $\boldsymbol{a}$, la naturaleza de éste queda determinada por el signo algebraico de la diferencia $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})$ para $\boldsymbol{x}$ próximo a $\boldsymbol{a}$. Si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}$, tenemos la fórmula de Taylor de primer orden

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\| \, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}), \text{ donde } E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) \to 0 \text{ cuando } \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{O}$$

En un punto estacionario, $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$ y la fórmula de Taylor toma la forma

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{y}\| \, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}).$$

Para determinar el signo algebraico de $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})$ necesitamos más información relativa al término de corrección $\|\boldsymbol{y}\| \, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})$. El teorema que sigue nos dice que si $f$ tiene en $\boldsymbol{a}$, derivadas parciales de segundo orden continuas, el término de corrección o complementario es igual a la forma cuadrática,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} f(\boldsymbol{a}) y_i y_j$$

más un término de orden menor que $\|\boldsymbol{y}\|^2$. Los coeficientes de la forma cuadrática son las derivadas parciales de segundo orden $D_{ij}f = D_i(D_j f)$, calculadas en $\boldsymbol{a}$. La matriz $n \times n$ de las derivadas segundas $D_{ij}f(\boldsymbol{x})$ es la llamada *matriz hessiana* (*) y se designa por $H(\boldsymbol{x})$. Así pues, tenemos

$$H(\boldsymbol{x}) = [D_{ij} f(\boldsymbol{x})]_{i,j=1}^{n}$$

con tal que existan las derivadas. La forma cuadrática puede escribirse más sencillamente en forma matricial como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} f(\boldsymbol{a}) y_i y_j = \boldsymbol{y} H(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{y}^t,$$

(*) De Ludwig Otto Hesse (1811-1874), matemático alemán autor de muchas contribuciones a la teoría de superficies.

en donde $y = (y_1, \ldots, y_n)$ se considera como una matriz fila $1 \times n$, e $y^t$ es su transpuesta, una matriz columna $n \times 1$. Cuando las derivadas parciales $D_{ij}f$ son continuas tenemos $D_{ij}f = D_{ji}f$ y la matriz $H(a)$ es simétrica.

La fórmula de Taylor que da una aproximación cuadrática para $f(a + y) - f(a)$, toma ahora la siguiente forma.

TEOREMA 9.4. FÓRMULA DE TAYLOR DE SEGUNDO ORDEN PARA CAMPOS ESCALARES. *Si $f$ es un campo escalar con derivadas parciales segundas $D_{ij}f$ continuas en una n-bola $B(a)$, entonces para todo $y$ de $\mathbf{R}^n$ tal que $a + y \in B(a)$ tenemos*

$$(9.34) \quad f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} yH(a + cy)y^t, \qquad \text{donde} \quad 0 < c < 1.$$

*Esto puede escribirse también en la forma*

$$(9.35) \qquad f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} yH(a)y^t + \|y\|^2 E_2(a, y),$$

*en donde $E_2(a, y) \to 0$ cuando $y \to O$.*

*Demostración.* Mantengamos $y$ fijo y definamos $g(u)$ para $u$ real mediante la ecuación

$$g(u) = f(a + uy) \quad \text{para} \quad -1 \leq u \leq 1.$$

Entonces $f(a + y) - f(a) = g(1) - g(0)$. Demostraremos el teorema aplicando la fórmula de Taylor de segundo orden a $g$ en el intervalo $[0, 1]$. Obtenemos

$$(9.36) \qquad g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2!} g''(c), \qquad \text{donde} \quad 0 < c < 1.$$

Aquí hemos utilizado para el resto la forma de Lagrange (véase la sección 7.7 del Volumen I).

Puesto que $g$ es una función compuesta dada por $g(u) = f[r(u)]$, siendo $r(u) = a + uy$ podemos calcular su derivada mediante la regla de la cadena. Tenemos $r'(u) = y$ así que la regla de la cadena nos da

$$g'(u) = \nabla f[r(u)] \cdot r'(u) = \nabla f[r(u)] \cdot y = \sum_{j=1}^{n} D_j f[r(u)] y_j,$$

con tal que $r(u) \in B(a)$. En particular, $g'(0) = \nabla f(a) \cdot y$. Aplicando una vez más la regla de la cadena encontramos

$$g''(u) = \sum_{i=1}^{n} D_i\left(\sum_{j=1}^{n} D_j f[r(u)] y_j\right) y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij} f[r(u)] y_i y_j = yH[r(u)]y^t .$$

Luego $g''(c) = yH(a + cy)y^t$, con lo que la ecuación (9.36) se transforma en la (9.34).

Para demostrar (9.35) definamos $E_2(a, y)$ por la ecuación

$$\|y\|^2 E_2(a, y) = \frac{1}{2!} y\{H(a + cy) - H(a)\}y^t \quad \text{si} \quad y \neq O, \tag{9.37}$$

y sea $E_2(a, O) = 0$. Entonces la ecuación (9.34) toma la forma

$$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} yH(a)y^t + \|y\|^2 E_2(a, y).$$

Para completar la demostración necesitamos probar que $E_2(a, y) \to 0$ cuando $y \to O$.

De (9.37), obtenemos

$$\begin{aligned}\|y\|^2 |E_2(a, y)| &= \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \{D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a)\} y_i y_j\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a)|\, \|y\|^2 .\end{aligned}$$

Dividiendo por $\|y\|^2$ obtenemos la desigualdad

$$|E_2(a, y)| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a)|$$

para $y \neq O$. Puesto que cada derivada parcial segunda $D_{ij}f$ es continua en $a$, tenemos $D_{ij}f(a + cy) \to D_{ij}f(a)$ cuando $y \to O$, así que $E_2(a, y) \to 0$ cuando $y \to O$. Esto completa la demostración.

## 9.11 Determinación de la naturaleza de un punto estacionario por medio de los autovalores de la matriz hessiana

En un punto estacionario tenemos $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$ , así que la fórmula de Taylor de la ecuación (9.35) toma la forma

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{y}H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{y}^t + \|\boldsymbol{y}\|^2 E_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}).$$

Puesto que el término de corrección $\|\boldsymbol{y}\|^2 E_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})$ tiende hacia cero más rápidamente que $\|\boldsymbol{y}\|^2$, parece razonable pensar que para $\boldsymbol{y}$ pequeño el signo algebraico de $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})$ es el mismo que el de la forma cuadrática $\boldsymbol{y}H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{y}^t$; por lo que la naturaleza del punto estacionario podrá determinarse mediante el signo algebraico de la forma cuadrática. Esta sección se dedica a demostrar este hecho.

Damos primero una conexión entre el signo algebraico de una forma cuadrática y sus autovalores.

TEOREMA 9.5. *Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$ simétrica, y pongamos*

$$Q(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}A\boldsymbol{y}^t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j .$$

*Tenemos entonces:*

a) $Q(\boldsymbol{y}) > 0$ *para todo* $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{O}$ *si y sólo si todos los autovalores de $A$ son positivos.*
b) $Q(\boldsymbol{y}) < 0$ *para todo* $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{O}$ *si y sólo si todos los autovalores de $A$ son negativos.*

*Observación.* En el caso a), la forma cuadrática se llama *definida positiva;* en el caso b) se llama *definida negativa.*

*Demostración.* En virtud del teorema 5.11 existe una matriz ortogonal $C$ que reduce la forma cuadrática $\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y}^t$ a forma diagonal. Esto es

$$Q(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}A\boldsymbol{y}^t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \tag{9.38}$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es la matriz fila $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}C$, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de $A$. Los autovalores son reales puesto que $A$ es simétrica.

Si todos los autovalores son positivos, la ecuación (9.38) pone de manifiesto que $Q(\boldsymbol{y}) > 0$ siempre que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{O}$. Pero como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}C$, tenemos $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}C^{-1}$, por lo que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{O}$, si y sólo si $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{O}$. En consecuencia $Q(\boldsymbol{y}) > 0$ para todo $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{O}$.

Recíprocamente, si $Q(y) > 0$ para todo $y \neq O$ podemos elegir $y$ de modo que $x = yC$ es el $k$-ésimo vector coordenado $e_k$. Para este $y$, la ecuación (9.38) nos da $Q(y) = \lambda_k$, de modo que cada $\lambda_k > 0$. Esto demuestra la parte a). La demostración de b) es análoga.

El teorema que sigue relaciona la naturaleza de un punto estacionario con el signo algebraico de la forma cuadrática $yH(a)y^t$.

TEOREMA 9.6. *Sea $f$ un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas $D_{ij}f$ en una n-bola $B(a)$, y designemos con $H(a)$ la matriz hessiana en un punto estacionario $a$. Tenemos entonces*:

a) *Si todos los autovalores de $H(a)$ son positivos, $f$ tiene un mínimo relativo en $a$.*

b) *Si todos los autovalores de $H(a)$ son negativos, $f$ tiene un máximo relativo en $a$.*

c) *Si $H(a)$ tiene autovalores positivos y negativos, $f$ tiene un punto de ensilladura en $a$.*

*Demostración.* Pongamos $Q(y) = yH(a)y^t$. La fórmula de Taylor nos da

$$f(a + y) - f(a) = \tfrac{1}{2}Q(y) + \|y\|^2 E_2(a, y), \tag{9.39}$$

en donde $E_2(a, y) \to 0$ cuando $y \to O$. Vamos a demostrar que existe un número positivo $r$ tal que, si $0 < \|y\| < r$, el signo algebraico de $f(a + y) - f(a)$ es el mismo que el de $Q(y)$.

Supongamos primero que todos los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $H(a)$ son positivos. Sea $h$ el autovalor más pequeño. Si $u < h$, los $n$ números

$$\lambda_1 - u, \ldots, \lambda_n - u$$

son también positivos. Esos números son los autovalores de la matriz real simétrica $H(a) - uI$, siendo $I$ la matriz identidad $n \times n$. Según el teorema 9.5, la forma cuadrática $y[H(a) - uI]y^t$ es definida positiva, y por tanto $y[H(a) - uI]y^t > 0$ para todo $y \neq O$. Por lo tanto

$$yH(a)y^t > y(uI)y^t = u\,\|y\|^2$$

para todo valor real $u < h$. Tomando $u = \tfrac{1}{2}h$ obtenemos la desigualdad

$$Q(y) > \tfrac{1}{2}h\,\|y\|^2$$

para todo $y \neq O$. Puesto que $E_2(a, y) \to O$ cuando $y \to O$, existe un número positivo $r$ tal que $|E_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})| < \frac{1}{4}h$ con tal que $0 < \|\boldsymbol{y}\| < r$. Para tal $\boldsymbol{y}$ tenemos

$$0 \leq \|\boldsymbol{y}\|^2 \, |E_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})| < \tfrac{1}{4}h \, \|\boldsymbol{y}\|^2 < \tfrac{1}{2}Q(\boldsymbol{y}),$$

y la fórmula de Taylor (9.39) demuestra que

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) \geq \tfrac{1}{2}Q(\boldsymbol{y}) - \|\boldsymbol{y}\|^2 \, |E_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})| > 0.$$

Por consiguiente $f$ tiene un mínimo relativo en $\boldsymbol{a}$, lo que demuestra la parte a). Para probar b) podemos utilizar un razonamiento parecido, o aplicando simplemente la parte a) a $-f$.

Para demostrar c), sean $\lambda_1$ y $\lambda_2$ dos autovalores de $H(\boldsymbol{a})$ de signos opuestos. Pongamos $h = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Entonces para cada valor real $u$ que satisfaga $-h < u < h$ los números

$$\lambda_1 - u \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 - u$$

son autovalores de signos opuestos de la matriz $H(\boldsymbol{a}) - uI$. Por consiguiente, si $u \in (-h, h)$, la forma cuadrática $\boldsymbol{y}[H(\boldsymbol{a}) - uI]\boldsymbol{y}^t$ toma valores positivos y negativos en todo entorno de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{O}$. Elijamos, como antes, $r > 0$ de modo que $|E_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})| < \frac{1}{4}h$ siempre que $0 < \|\boldsymbol{y}\| < r$. Razonando, entonces, como antes vemos que para tal $\boldsymbol{y}$ el signo de $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})$ es el mismo que el de $Q(\boldsymbol{y})$. Puesto que para $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{O}$, se presentan valores positivos y negativos, $f$ tiene en $\boldsymbol{a}$ un punto de ensilladura. Esto completa la demostración.

*Observación*: Si todos los autovalores de $H(\boldsymbol{a})$ son cero, el teorema 9.6 no nos da información relativa al punto estacionario. Se pueden dar criterios, para tratar tales ejemplos, en los que intervienen derivadas de orden superior, pero no los expondremos aquí.

## 9.12 Criterio de las derivadas segundas para determinar extremos de funciones de dos variables

En el caso $n = 2$ la naturaleza del punto estacionario se puede determinar también mediante el signo algebraico de la derivada segunda $D_{1,1}f(\boldsymbol{a})$ y del determinante de la matriz hessiana.

TEOREMA 9.7. *Sea $\boldsymbol{a}$ un punto estacionario de un campo escalar $f(x_1, x_2)$*

*con derivadas parciales segundas continuas en una 2-bola $B(\boldsymbol{a})$. Designemos con*

$$A = D_{1,1}f(\boldsymbol{a}), \qquad B = D_{1,2}f(\boldsymbol{a}), \qquad C = D_{2,2}f(\boldsymbol{a}),$$

*y sea*

$$\Delta = \det H(\boldsymbol{a}) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = AC - B^2.$$

*Tenemos entonces:*

a) *Si $\Delta < 0$, $f$ tiene un punto de ensilladura en $\boldsymbol{a}$.*
b) *Si $\Delta > 0$ y $A > 0$, $f$ tiene un mínimo relativo en $\boldsymbol{a}$.*
c) *Si $\Delta > 0$ y $A < 0$, $f$ tiene un máximo relativo en $\boldsymbol{a}$.*
d) *Si $\Delta = 0$, el criterio no decide nada.*

*Demostración.* En este caso la ecuación característica $\det [\lambda I - H(\boldsymbol{a})] = 0$ es cuadrática,

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \Delta = 0.$$

Los autovalores $\lambda_1, \lambda_2$ están ligados a los coeficientes por las ecuaciones

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + C, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \Delta.$$

Si $\Delta < 0$ los autovalores tienen signos opuestos, así que $f$ tiene un punto de ensilladura en $\boldsymbol{a}$, lo que prueba a). Si $\Delta > 0$, los autovalores tienen el mismo signo. En este caso $AC > B^2 \geqslant 0$, así que $A$ y $C$ tienen el mismo signo. Este signo debe ser el de $\lambda_1$ y $\lambda_2$ ya que $A + C = \lambda_1 + \lambda_2$. Esto demuestra b) y c).

Para demostrar d) nos referiremos a los ejemplos 4 y 5 de la sección 9.9. En ambos tenemos $\Delta = 0$ en el origen. En el ejemplo 4 el origen es un punto de ensilladura, y en el ejemplo 5 es un mínimo relativo.

Aun cuando sea aplicable el teorema 9.7 puede ocurrir que no sea éste el camino más sencillo para determinar la naturaleza de un punto estacionario. Por ejemplo, cuando $f(x, y) = e^{1/g(x,y)}$, en donde $g(x, y) = x^2 + 2 + \cos^2 y - 2 \cos y$, el criterio es aplicable, pero los cálculos son muy largos. En este caso podemos expresar $g(x, y)$ como una suma de cuadrados escribiendo $g(x, y) = 1 + x^2 + (1 - \cos y)^2$. En seguida vemos que $f$ tiene máximos relativos en los puntos en los que $x^2 = 0$ y $(1 - \cos y)^2 = 0$. Estos son los puntos $(0, 2n\pi)$, siendo $n$ un entero cualquiera.

## 9.13 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 15, identificar y clasificar (si existen) los puntos estacionarios de las superficies que tienen las ecuaciones cartesianas que se dan.

1. $z = x^2 + (y-1)^2$.
2. $z = x^2 - (y-1)^2$.
3. $z = 1 + x^2 - y^2$.
4. $z = (x - y + 1)^2$.
5. $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$.
6. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.
7. $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$.
8. $z = x^2y^3(6 - x - y)$.
9. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
10. $z = \operatorname{sen} x \cosh y$.
11. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.
12. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.
13. $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y), \qquad 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$.
14. $z = x - 2y + \log\sqrt{x^2+y^2} + 3\arctan\dfrac{y}{x}, \qquad x > 0$.
15. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
16. Sea $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Demostrar que sobre toda recta de la forma $y = mx$ la función tiene un mínimo en $(0,0)$, pero que no existe mínimo relativo en ningún entorno bidimensional del origen. Hacer un dibujo indicando el conjunto de puntos $(x,y)$ en los que $f(x,y) > 0$ y el conjunto en el que $f(x,y) < 0$.
17. Sea $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$.
    a) Trazar una figura indicando el conjunto de puntos $(x,y)$ en los que $f(x,y) \ge 0$.
    b) Hallar todos los puntos $(x,y)$ del plano en los que $D_1f(x,y) = D_2f(x,y) = 0$. [*Indicación.* $D_1f(x,y)$ contiene $(3-y)$ como factor.]
    c) ¿Cuáles de los puntos estacionarios son máximos relativos? ¿Cuáles son mínimos relativos? ¿Cuáles ni una cosa ni otra? Razonar las contestaciones.
    d) ¿Tiene $f$ un mínimo absoluto o un máximo absoluto en todo el plano? Razonar la contestación.
18. Determinar todos los valores extremos absolutos y relativos y los puntos de ensilladura para la función $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en el cuadrado $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.
19. Determinar las constantes $a$ y $b$ para que la integral

$$\int_0^1 \{ax + b - f(x)\}^2\,dx$$

tome el valor menor posible si a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = (x^2+1)^{-1}$.

20. Sea $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ en donde $A > 0$ y $B^2 < AC$.
    a) Demostrar que existe un punto $(x_1, y_1)$ en el que $f$ tiene un mínimo. [*Indicación.* Transformar la parte cuadrática en una suma de cuadrados.]
    b) Demostrar que $f(x_1, y_1) = Dx_1 + Ey_1 + F$ en ese mínimo.
    c) Demostrar que

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{AC - B^2}\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

21. *Método de los mínimos cuadrados.* Dados $n$ números distintos $x, \ldots, x_n$ y otros $n$ números $y_1, \ldots, y_n$ (no necesariamente distintos), es en general imposible encontrar una recta $f(x) = ax + b$ que pase por todos los puntos $(x_i, y_i)$, esto es, tal que $f(x_i) = y_i$ para cada $i$. No obstante, podemos encontrar una función lineal con la que el «error cuadrático total»

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

sea mínimo. Determinar los valores de $a$ y $b$ para que eso ocurra.

22. Extender el método de los mínimos cuadrados a $E_3$. Esto es, hallar una función lineal $f(x, y) = ax + by + c$ que minimice el error cuadrático total

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, y_i) - z_i]^2,$$

donde $(x_i, y_i)$ son $n$ puntos distintos dados y $z_1, \ldots, z_n$ son $n$ números reales dados.

23. Sean $z_1, \ldots, z_n$ $n$ puntos distintos en un $m$-espacio. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$, definamos

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_k\|^2.$$

Demostrar que $f$ tiene un mínimo en el punto $\boldsymbol{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{z}_k$ (centroide).

24. Sea $\boldsymbol{a}$ un punto estacionario de un campo escalar $f$ con derivadas parciales segundas en una $n$-bola $B(\boldsymbol{a})$. Demostrar que $f$ tiene un punto de ensilladura en $\boldsymbol{a}$ si por lo menos dos elementos de la diagonal principal de la matriz hessiana $H(\boldsymbol{a})$ tienen signos opuestos.

25. Comprobar que el campo escalar $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ tiene un punto estacionario en $(1, 1, 1)$, y determinar la naturaleza de ese punto estacionario calculando los autovalores de su matriz hessiana.

## 9.14 Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

Iniciamos esta sección con dos ejemplos de problemas de extremos condicionados.

EJEMPLO 1. Dada una superficie $S$ que no pase por el origen, determinar los puntos de $S$ más próximos al origen.

EJEMPLO 2. Si $f(x, y, z)$ representa la temperatura en $(x, y, z)$, determinar los valores máximo y mínimo de la temperatura en una curva dada $C$ del espacio de tres dimensiones.

Ambos ejemplos son casos particulares del siguiente problema general: *Determinar los valores extremos de un campo escalar $f(\boldsymbol{x})$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiene la restricción de pertenecer a un subconjunto dado del dominio de $f$.*

En el ejemplo 1 el campo escalar cuyo mínimo se desea es la función distancia,

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2};$$

el subconjunto restringido es la superficie dada $S$. En el ejemplo 2 tal subconjunto es la curva dada $C$.

Con frecuencia los problemas de extremos condicionados son muy difíciles; no se conoce un método general para resolverlos con toda generalidad. Se utilizan métodos particulares cuando el subconjunto restringido tiene una estructura sencilla, por ejemplo, si es una superficie como en el ejemplo 1, o una curva como en el ejemplo 2. Esta sección está dedicada al método de los multiplicadores de Lagrange para resolver tales problemas. Ante todo exponemos el método en su forma general, y luego damos argumentos geométricos para comentar su aplicación a los dos ejemplos antes mencionados.

*Método de los multiplicadores de Lagrange.* Si un campo escalar $f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene un extremo relativo cuando está sometido a $m$ condiciones, por ejemplo

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{9.40}$$

siendo $m < n$, existen entonces $m$ escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \cdots + \lambda_m \nabla g_m \tag{9.41}$$

en cada punto extremo.

Para determinar los puntos extremos en la práctica consideramos el sistema de $n + m$ ecuaciones formado con las $m$ ecuaciones de condición (9.40) y las $n$ ecuaciones escalares determinadas por la relación vectorial (9.41). Se resuelve el sistema (si ello es posible) respecto a las $n + m$ incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Los puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ en los que se presentan los extremos relativos se encuentran entre las soluciones de aquél sistema.

Los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ que se introdujeron para ayudarnos a resolver este tipo de problema se denominan *multiplicadores de Lagrange.* Se introduce un multiplicador por cada condición. El campo escalar $f$ y las funciones de condición $g_1, \ldots, g_m$ se suponen diferenciables. El método es válido si el número de condiciones, $m$, es menor que el número de variables, $n$, y si no todos los determinantes jacobianos de las funciones de condición con respecto a $m$ de las variables $x_1, \ldots, x_n$ son nulos para los valores extremos que se consideran. La demostración de la validez del método es un resultado importante del cálculo superior y no la expondremos aquí. (Véase el capítulo 7 de la obra del autor *Análisis matemático,* Editorial Reverté, S. A., Barcelona, Buenos Aires, Caracas, México. En lugar de ello daremos unos argumentos geométricos para hacer ver el significado del método y cómo se aplica en los dos ejemplos que al principio se han citado.

*Solución geométrica del ejemplo 1.* Queremos determinar los puntos de una superficie dada $S$ que están más próximos al origen. Un punto $(x, y, z)$ del espacio de tres dimensiones está a distancia $r$ del origen si y sólo si está en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Esta esfera es una superficie de nivel de la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ que hay que minimar. Si empezamos con $r = 0$ y aumentamos $r$ hasta que la correspondiente superficie de nivel sea tangente a la superficie dada $S$, cada punto de contacto será un punto de $S$ lo más próximo al origen.

Para determinar los puntos de contacto suponemos que $S$ está definida por la ecuación cartesiana $g(x, y, z) = 0$. Si $S$ tiene plano tangente en un punto de contacto, dicho plano también debe ser tangente a la superficie de nivel tangente a $S$ en el mismo punto. Por lo tanto el vector gradiente de la superficie $g(x, y, z) = 0$ debe ser paralelo al vector gradiente de la superficie de nivel de contacto $f(x, y, z) = $ r. Por tanto existe una constante $\lambda$ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

en cada punto de contacto. Esa es la ecuación vectorial (9.41) lograda con el método de Lagrange cuando hay una sola condición.

*Solución geométrica del ejemplo 2.* Queremos obtener los valores extremos

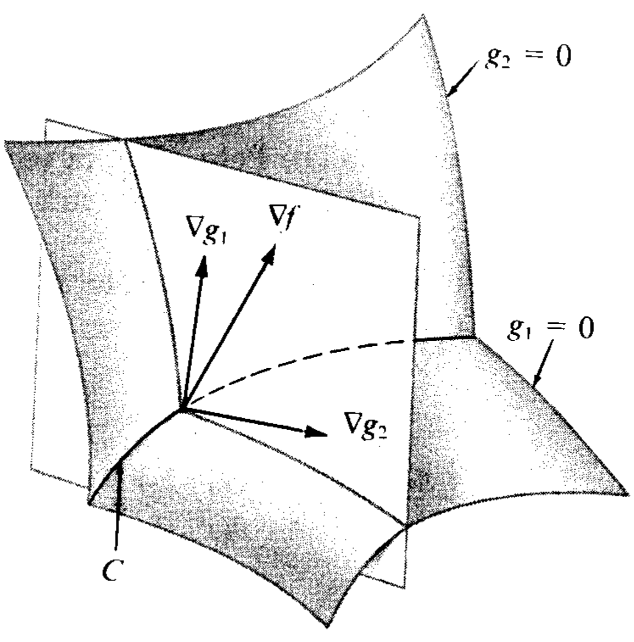



FIGURA 9.8 *Los vectores $\nabla g_1, \nabla g_2$ y $\nabla f$ están situados en el mismo plano.*

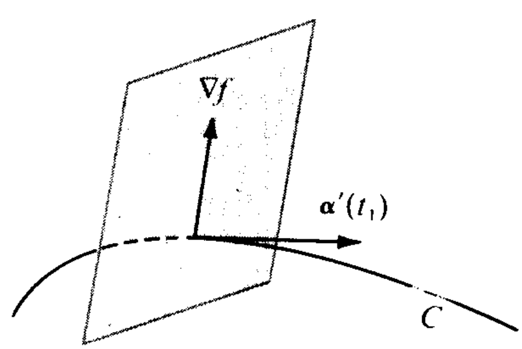



FIGURA 9.9 *El vector gradiente $\nabla f$ está en un plano normal a $C$.*

de una función que da la temperatura $f(x, y, z)$ sobre una curva dada $C$. Si consideramos la curva $C$ como la intersección de dos superficies,

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(x, y, z) = 0,$$

tenemos un problema de extremos con dos condiciones. Los dos vectores gradientes $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ son normales a esas superficies, luego también lo son a la curva $C$ de intersección. (Ver figura 9.8). Seguidamente demostramos que el vector gradiente $\nabla f$ de la función temperatura también es normal a $C$ en cada extremo relativo sobre $C$. Ello implica que $\nabla f$ está en el mismo plano que $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$; luego si $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ son independientes podemos expresar $\nabla f$ como combinación lineal de $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$, es decir

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 .$$

Ésta es la ecuación vectorial (9.41) obtenida con el método de Lagrange cuando existen dos condiciones.

Para demostrar que $\nabla f$ es normal a $C$ en un punto extremo imaginemos que $C$ esté definida por una función vectorial $\boldsymbol{\alpha}(t)$, variando $t$ en un intervalo $[a, b]$. Sobre la curva $C$ la temperatura se convierte en una función de $t$, es decir $\varphi(t) = f[\boldsymbol{\alpha}(t)]$. Si $\varphi$ tiene un extremo relativo en un punto interior $t_1$ de$[a, b]$ tiene que verificarse $\varphi'(t_1) = 0$. Por otra parte, la regla de la cadena nos dice que $\varphi'(t)$ viene dada por el producto escalar

$$\varphi'(t) = \nabla f[\boldsymbol{\alpha}(t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t) .$$

Este producto es nulo en $t_1$, luego $\nabla f$ es perpendicular a $\boldsymbol{\alpha}'(t)$. Pero $\boldsymbol{\alpha}'(t_1)$ es tangente a $C$, por lo que $\nabla f\ [\boldsymbol{\alpha}(t_1)]$ está en el plano normal a $C$, como muestra la figura 9.9.

Los dos vectores gradientes $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ son independientes si y sólo si su producto vectorial es no nulo. Este producto viene dado por

$$\nabla g_1 \times \nabla g_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)} \boldsymbol{i} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z, x)} \boldsymbol{j} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)} \boldsymbol{k} .$$

Por consiguiente, la independencia de $\nabla g_1$ *y* $\nabla g_2$ significa que no todos los determinantes jacobianos del segundo miembro son cero. Como ya hemos observado, el método de Lagrange es aplicable siempre que esta condición se satisfaga.

Si $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ son dependientes el método puede fallar. Por ejemplo, supongamos que intentamos la aplicación del método de Lagrange para encontrar los valores extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ en la curva de intersección de las dos superficies $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$ siendo $g_1(x, y, z) = z$ y $g_2(x, y, z) = z^2 - (y - 1)^3$. Las dos superficies, un plano y un cilindro, se cortan a lo largo de la recta $C$ dibujada en la figura 9.10. El problema tiene evidentemente una

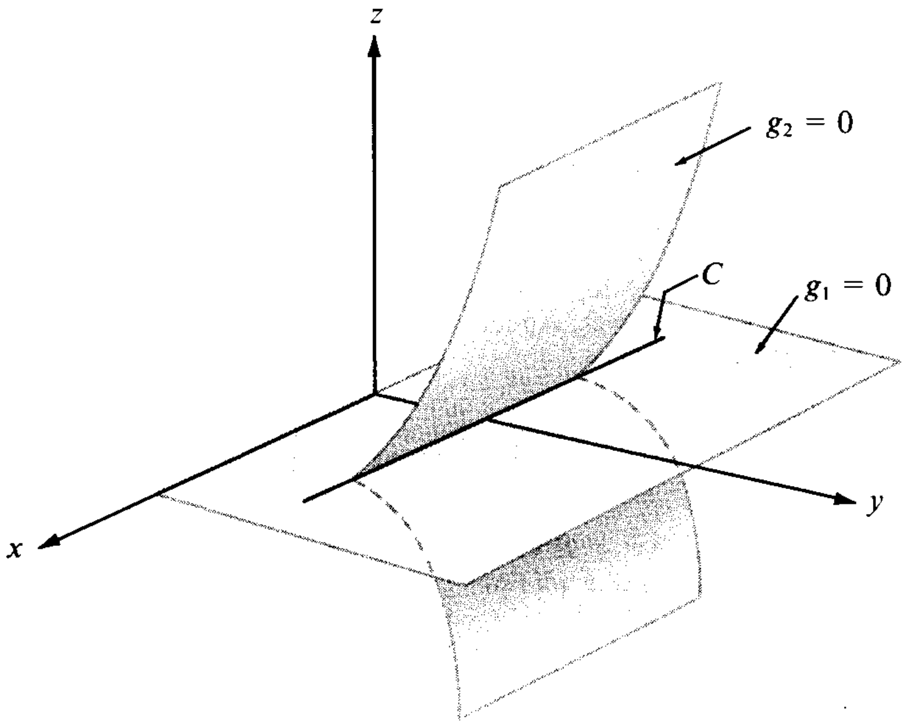



FIGURA 9.10 *Ejemplo en el que el método de Lagrange no es aplicable.*

solución, debido a que $f(x, y, z)$ representa la distancia del punto $(x, y, z)$ al eje $z$ y esta distancia es un mínimo sobre $C$ cuando el punto es el $(0, 1, 0)$. Sin embargo, en este punto los vectores gradientes son $\nabla g_1 = \boldsymbol{k}$, $\nabla g_2 = \boldsymbol{O}$, y $\nabla f = 2\boldsymbol{j}$, y está claro que no existen escalares $\lambda_1$ y $\lambda_2$ que satisfagan la ecuación (9.41).

## 9.15 Ejercicios

1. Hallar los valores extremos de $z = xy$ con la condición $x + y = 1$.
2. Hallar las distancias máxima y mínima desde el origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.
3. Supongamos que $a$ y $b$ son números positivos fijos.
   a) Hallar los valores extremos de $z = x/a + y/b$ con la condición $x^2 + y^2 = 1$.
   b) Hallar los valores extremos de $z = x^2 + y^2$ con la condición $x/a + y/b = 1$.
   En cada caso, interpretar geométricamente el problema.
4. Hallar los valores extremos de $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ con la condición $x - y = \pi/4$.
5. Hallar los valores extremos del campo escalar $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.
7. Hallar la mínima distancia desde el punto $(1, 0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.
8. Hallar los puntos de la curva de intersección de las dos superficies

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

que están más próximos al origen.
9. Si $a, b$ y $c$ son números positivos, hallar el valor máximo de $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ con la condición $x + y + z = 1$.
10. Hallar el volumen mínimo limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y un plano que sea tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en un punto del octante $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
11. Hallar el máximo de $\log x + \log y + 3 \log z$ en la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ en la que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Aplicar el resultado para demostrar que para números reales positivos $a, b, c$ tenemos

$$abc^3 \leq 27\left(\frac{a + b + c}{5}\right)^5.$$

12. Dada la sección cónica $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$, siendo $A > 0$ y $B^2 < AC$. Representemos con $m$ y $M$ las distancias mínima y máxima desde el origen a los puntos de la cónica. Demostrar que

$$M^2 = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2(AC - B^2)}$$

y hallar una fórmula análoga para $m^2$.
13. Aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar las distancias máxima y mínima de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$.
14. La sección de un canal es un trapecio isósceles. Si los lados iguales de ese trapecio miden $c$ metros, ¿cuál debe ser el ángulo que forman éstos con el fondo (base menor del trapecio) si queremos que el área de la sección sea máxima?

## 9.16 Teorema del valor extremo para campos escalares continuos

El teorema del valor extremo para funciones reales continuas en un intervalo acotado y cerrado puede extenderse a campos escalares. Consideremos campos escalares continuos en un intervalo $n$-dimensional cerrado. Tal intervalo se define como el producto cartesiano de $n$ intervalos uni-dimensionales cerrados. Si $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ escribimos

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in [a_1, b_1], \ldots, x_n \in [a_n, b_n]\}.$$

Por ejemplo, cuando $n = 2$ el producto cartesiano $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ es un rectángulo.

La demostración del teorema del valor extremo es paralela a la demostración dada en el volumen I para el caso unidimensional. Demostramos primero que la continuidad de $f$ implica la acotación, luego probamos que $f$ alcanza efectivamente sus valores máximo y mínimo en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

TEOREMA 9.8. TEOREMA DE ACOTACIÓN PARA CAMPOS ESCALARES CONTINUOS. *Si $f$ es un campo escalar continuo en cada punto de un intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ de $\mathbf{R}^n$, entonces $f$ es acotada en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Esto es, existe un número $C \geqslant 0$ tal que $|f(\boldsymbol{x})| \leqslant C$ para todo $\boldsymbol{x}$ de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.*

*Demostración.* Razonemos por reducción al absurdo, utilizando el método de la bisección sucesiva. La figura 9.11 representa el método para el caso $n = 2$.

Supongamos que $f$ no esté acotada en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Pongamos $I^{(1)} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ e $I_k^{(1)} = [a_k, b_k]$, así que

$$I^{(1)} = I_1^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)}.$$

Dividamos en dos partes iguales cada intervalo unidimensional $I_k^{(1)}$ formando dos subintervalos, la mitad izquierda $I_{k,1}^{(1)}$ y la mitad derecha $I_{k,2}^{(1)}$. Consideremos ahora todos los productos cartesianos posibles de la forma

$$I_{1,j_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,j_n}^{(1)},$$

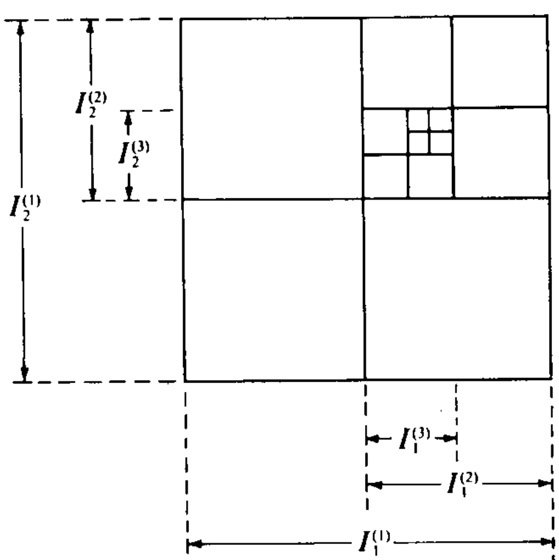



FIGURA 9.11 *Representación en el plano del método de la bisección sucesiva.*

en donde cada $j_i = 1$ ó 2. Existen exactamente $2^n$ productos de este tipo. Cada uno de ellos es un subintervalo $n$-dimensional de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, y su reunión es igual a $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. La función $f$ no está acotada en *uno por lo menos* de esos subintervalos (si estuviera acotada en cada uno de ellos también estaría en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$). Designemos por $I^{(2)}$ uno de ellos que expresamos del modo siguiente

$$I^{(2)} = I_1^{(2)} \times \cdots \times I_n^{(2)},$$

en donde cada $I_k^{(2)}$ es uno de los subintervalos unidimensionales de $I_k^{(1)}$, de longitud $\frac{1}{2}(b_k - a_k)$.

Seguidamente hacemos con $I^{(2)}$ lo mismo que con $I^{(1)}$, bisecamos cada componente unidimensional $I_k^{(2)}$ y llegamos a un intervalo $n$-dimensional $I^{(3)}$ en el que $f$ no está acotada. Prosiguiendo este proceso, obtenemos un conjunto infinito de intervalos $n$-dimensionales

$$I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, \text{ tales que } I^{(m+1)} \subseteq I^{(m)},$$

en cada uno de los cuales $f$ no está acotada. El intervalo $m$-ésimo $I^{(m)}$ puede expresarse en la forma

$$I^{(m)} = I_1^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}.$$

Como quiera que cada intervalo unidimensional $I_k^{(m)}$ se obtiene mediante $m - 1$ bisecciones sucesivas de $[a_k, b_k]$, si escribimos $I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}]$ tenemos

$$\text{(9.42)} \qquad b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{b_k - a_k}{2^{m-1}}, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Para cada $k$ fija, el extremo superior de todos los extremos izquierdos $a_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, \ldots$) debe ser igual al extremo inferior de todos los extremos derechos $b_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, \ldots$), y designamos su valor común con $t_k$. El punto $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ está contenido en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. En virtud de la continuidad de $f$ en $\boldsymbol{t}$ existe una $n$-bola $B(\boldsymbol{t}; r)$ en la que tenemos

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{t})| \leq 1 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \text{ de } B(\boldsymbol{t}; r) \cap [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Esta desigualdad implica

$$|f(\boldsymbol{x})| < 1 + |f(\boldsymbol{t})| \text{ para todo } \boldsymbol{x} \text{ de } B(\boldsymbol{t}; r) \cap [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],$$

con lo que $f$ no está acotada en el conjunto $B(\boldsymbol{t}; r) \cap [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Pero este conjunto contiene todo el intervalo $I^{(m)}$ cuando $m$ es lo bastante grande para que cada uno de los $n$ números (9.42) sea menor que $r/\sqrt{n}$. Por consiguiente para ese valor de $m$ la función $f$ no está acotada en $I^{(m)}$, lo que está en contradicción con el hecho de que $f$ está acotada en $I^{(m)}$. Con ello se completa la demostración.

Si $f$ está acotada en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, el conjunto de todos los valores $f(\boldsymbol{x})$ es un conjunto de números reales acotado superior e inferiormente. Por consiguiente ese conjunto tiene un extremo superior y un extremo inferior que designamos con $\sup f$ e $\inf f$, respectivamente. Esto es, escribimos

$$\sup f = \sup\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\}, \qquad \inf f = \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\}.$$

Ahora vamos a demostrar que una función continua alcanza los valores $\inf f$ y $\sup f$ en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

TEOREMA 9.9. TEOREMA DEL VALOR EXTREMO PARA CAMPOS ESCALARES. *Si $f$ es continua en un intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ de $\mathbf{R}^n$, entonces existen puntos $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tales que*

$$f(\boldsymbol{c}) = \sup f \qquad y \qquad f(\boldsymbol{d}) = \inf f.$$

*Demostración.* Basta demostrar que $f$ alcanza su extremo superior en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. El resultado para el extremo inferior se deduce como una consecuencia debido a que el extremo inferior de $f$ es el extremo superior de $-f$.

Pongamos $M = \sup f$. Supondremos que en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ no existe ningún $\boldsymbol{x}$ para el que $f(\boldsymbol{x}) = M$ y obtendremos una contradicción. Pongamos $g(\boldsymbol{x}) = M - f(\boldsymbol{x})$. Para todo $\boldsymbol{x}$ de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ es entonces $g(\boldsymbol{x}) > 0$ de modo que la función recíproca $1/g$ es continua en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Según el teorema de acotación, $1/g$ está acotada en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, sea $1/g(\boldsymbol{x}) < C$ para todo $\boldsymbol{x}$ de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, siendo $C > 0$. Esto implica que $M - f(\boldsymbol{x}) > 1/C$, con lo que $f(\boldsymbol{x}) < M - 1/C$ para todo $\boldsymbol{x}$ de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Esto contradice el hecho de que $M$ es la menor cota superior de $f$ en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Luego $f(\boldsymbol{x}) = M$ para un $\boldsymbol{x}$ por lo menos de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

## 9.17 Teorema de la continuidad uniforme para campos escalares continuos

Sea $f$ continua en un intervalo cerrado acotado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ en $\mathbf{R}^n$, y designemos con $M(f)$ y $m(f)$, respectivamente, los valores máximo y mínimo de $f$ en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. La diferencia

$$M(f) - m(f)$$

se llama *oscilación* de $f$ en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Como en el caso unidimensional tenemos un