(6)		$B \rightarrow C$	PP 1, 5
(7)		C	PP 3, 6
(8)	$D \rightarrow C$		CP 4, 7

La parte de la demostración que se ha corrido varios espacios hacia la derecha se denomina *demostración subordinada.* Da una respuesta a la pregunta, «¿Qué se podría demostrar si además de las premisas que se tienen se tuviera la premisa D? En la demostración subordinada se dice en efecto, «¡Veámoslo!». Y se encuentra que si se tuviera D entonces se podría obtener C. Así en la línea (8) se dice que con las premisas originales, si D entonces C.

Pero la regla P indica que se puede introducir una premisa en *cualquier* momento de una deducción. Pero *cada vez* que se añade una nueva premisa a las premisas dadas, la demostración ha de correrse hacia la derecha. Se supone que se está ya dentro de una demostración subordinada, y se estudia el ejemplo siguiente:

Demostrar: $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow R)$

(1)	$S \ \& \ (\neg P \vee M)$			P
(2)	$M \rightarrow Q \vee R$			P
(3)	$\neg P \vee M$			S 1
(4)		P		P
(5)		M		TP 3, 4
(6)			$\neg Q$	P
(7)			$Q \vee R$	PP 2, 5
(8)			R	TP 6, 7
(9)		$\neg Q \rightarrow R$		CP 7, 8
(10)	$P \rightarrow (\neg Q \rightarrow R)$			CP 4, 9

La conclusión ha de ser una condicional, pues se ha intentado una demostración condicional.

Se introduce el antecedente, P. de la condicional deseada, y se intenta deducir el consecuente, $\neg Q \rightarrow R$. En la línea (6) se efectúa otra demostración condicional puesto que la $\neg Q \rightarrow R$ que se desea deducir es a su vez una condicional. Así se añade su antecedente $\neg Q$ y se corre de nuevo hacia la derecha. Esto da una demostración subordinada a la primera demostración subordinada. Después de deducir Q, se usa la regla de demostración condicional. Esto permite volver a la demostración a la que se está subordinado y da el consecuente que se quería deducir en la primera demostración subordinada. Aplicando CP de nuevo se vuelve a la demostración principal. Una aplicación de CP da fin a una subordinación. Se ha de señalar también que en cada paso se puede utilizar una línea cualquiera que aparezca antes en la *misma* demostración o antes en cualquier demostración a la que estemos subordinados. Así, en la línea (7) se puede usar la línea (2) y la línea (5). Pero después de la línea (9) no podrían utilizarse las líneas de la (6) a la (8), y después de la (10), las líneas de la (4) a la (9).

Ejercicio 8

A. Utilizar una demostración condicional para deducir la conclusión en cada uno de los siguientes razonamientos simbolizados. Dar una demostración formal completa.

1. Demostrar: $\neg P \rightarrow Q$
   (1) $P \vee Q$

2. Demostrar: $R \rightarrow \neg Q$
   (1) $\neg R \vee \neg S$
   (2) $Q \rightarrow S$

3. Demostrar: $C \rightarrow \neg D$
   (1) $B \rightarrow \neg C$
   (2) $\neg(D \ \& \ \neg B)$

4. Demostrar: $\neg Q \rightarrow T$
   (1) $S \rightarrow R$
   (2) $S \vee P$
   (3) $P \rightarrow Q$
   (4) $R \rightarrow T$

5. Demostrar: $P \rightarrow P \ \& \ Q$
   (1) $R \rightarrow T$
   (2) $T \rightarrow \neg S$
   (3) $(R \rightarrow \neg S) \rightarrow Q$

6. Demostrar: $S \rightarrow Q$
   (1) $R \rightarrow Q$
   (2) $T \rightarrow R$
   (3) $S \rightarrow T$

7. Dem. $\neg(R \ \& \ S) \rightarrow T$
   (1) $\neg P$
   (2) $\neg R \rightarrow T$
   (3) $\neg S \rightarrow P$

8. Dem. $T \vee \neg S \rightarrow R$
   (1) $\neg R \rightarrow Q$
   (2) $T \rightarrow \neg Q$
   (3) $\neg S \rightarrow \neg Q$

9. Dem. $T \rightarrow \neg(P \vee Q)$
   (1) $\neg S \vee \neg P$
   (2) $Q \rightarrow \neg R$
   (3) $T \rightarrow S \ \& \ R$

10. Dem. $\neg Q \rightarrow T \ \& \ S$
   (1) $R \rightarrow S$
   (2) $S \rightarrow Q$
   (3) $R \vee (S \ \& \ T)$

11. D $(P \ \& \ Q) \rightarrow (S \ \& \ T)$
   (1) $R \vee S$
   (2) $\neg T \rightarrow \neg P$
   (3) $R \rightarrow \neg Q$

12. Dem. $S \rightarrow P \vee Q$
   (1) $S \rightarrow T$
   (2) $R \rightarrow P$
   (3) $T \rightarrow R$

13. Demostrar: $\neg(P \vee R) \rightarrow T$
   (1) $Q \rightarrow P$
   (2) $T \vee S$
   (3) $Q \vee \neg S$

14. Demostrar: $E \rightarrow K$
   (1) $E \vee F \rightarrow G$
   (2) $J \rightarrow \neg G \ \& \ \neg H$
   (3) $J \vee K$

15. Demostrar: $Q \leftrightarrow \neg P$
   (1) $\neg(\neg P \ \& \ \neg Q)$
   (2) $S \rightarrow \neg Q$
   (3) $\neg P \vee S$

16. Demostrar: $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
   (1) $P \ \& \ Q \rightarrow R$

17. Demostrar: $x=0 \ \vee \ x=1 \ \rightarrow \ x^3-3x^2+2x=0$
   (1) $x=0 \ \rightarrow \ x^2-x=0$
   (2) $x=1 \ \rightarrow \ x^2-x=0$
   (3) $x=2 \ \vee \ x^2-x=0 \ \rightarrow \ x^3-3x^2+2x=0$

18. Demostrar: $y=2 \ \vee \ y=4 \ \rightarrow \ y<4 \ \vee \ y>3$
   (1) $(y=4 \ \rightarrow \ x>y) \ \& \ x>z$
   (2) $x>y \ \vee \ z>y \ \rightarrow \ y<4 \ \& \ y\neq 3$
   (3) $y=2 \ \rightarrow \ z>y$

19. Demostrar: $y=2 \ \rightarrow \ x=y$
   (1) $x\neq y \ \rightarrow \ x>y \ \vee \ y>x$
   (2) $y\neq 2 \ \vee \ x=2$
   (3) $x>y \ \vee \ y>x \ \rightarrow \ x\neq 2$

20. Demostrar: $x=1 \ \rightarrow \ x\neq 2 \ \& \ y\neq 1$
   (1) $x=1 \ \rightarrow \ xy=2$
   (2) $x+y\neq 3 \ \rightarrow \ x\neq 1$
   (3) $y=1 \ \vee \ x=2 \ \rightarrow \ \neg(x+y=3 \ \& \ xy=2)$

B. Dar una deducción completa para cada uno de los razonamientos siguientes para probar su validez.

1. O el testigo no dice la verdad, o Juan estaba en casa alrededor de las once.

Si Juan estaba en casa alrededor de las once, entonces él vio a su tío.
Si vio a su tío, entonces él sabe quién estuvo antes.
Por tanto, si el testigo dice la verdad, entonces Juan sabe quién estuvo antes.

2. O la Lógica es difícil o no les gusta a muchos estudiantes.
   Si la Matemática es fácil, entonces la Lógica no es difícil.
   Por tanto, si a muchos estudiantes les gusta la Lógica, la Matemática no es fácil.
3. Si los «Piratas» son terceros, entonces si los «Apaches» son segundos los «Bravos» serán quintos.
   O los «Gigantes» no serán primeros o los «Piratas» serán terceros.
   En efecto, los «Apaches» serán segundos.
   Por tanto, si los «Gigantes» son primeros, entonces los «Bravos» serán quintos.
4. Si Juan gana, entonces Luis o Esteban serán segundos.
   Si Luis es segundo, entonces Juan no ganará.
   Si Pedro es segundo, entonces Esteban no será segundo.
   Por tanto, si Juan gana, entonces Pedro no será segundo.
5. Si Isabel es su hermana, entonces Carlos es su hermano.
   Si Carlos es su hermano, entonces ella vive en la calle del Álamo.
   Por tanto, si Isabel es su hermana, entonces ella vive en la calle del Álamo.

C. Si los razonamientos que siguen son válidos, dar una demostración formal. Si no son válidos, escribir «no válido» al lado y demostrar la no validez por una asignación de certeza.

1. Si Antonio no es primero, entonces Pedro es primero.
   Pero Pedro no es primero.
   O Antonio es primero o Pablo es tercero.
   Si Jaime es segundo, entonces Pablo no es tercero.
   Por tanto, Jaime no es segundo.
2. Si el contrato es legal y Pérez entró en el contrato, entonces García ganará el pleito.
   O García no ganará el pleito o Pérez será responsable.
   Pérez no será responsable.
   Por tanto, o el contrato no es legal o Pérez no entró en el contrato.
3. Si esperamos a Rosa llegaremos tarde.
   O no llegaremos tarde o llegaremos a la escuela después de las 8 h, 30 m.
   Si llegamos a la escuela después de las 8 h, 30 m, entonces tenemos que presentarnos en secretaría.

Por tanto, si esperamos a Rosa, entonces o tenemos que presentarnos en secretaría o traemos una excusa por escrito.

4. Martín fue nombrado presidente.
   Si Ruiz fue elegido, entonces Martín no fue nombrado presidente.
   Si Alonso fue elegido, entonces la elección se hizo hoy.
   Por tanto, si Ruiz fue elegido o Alonso fue elegido, entonces la elección se hizo hoy.
5. O María está con Pilar o Luisa está con Pilar.
   Si hoy es lunes entonces María está con Pilar.
   Hoy es lunes.
   Por tanto, Luisa no está con Pilar.

Hallar los errores en las siguientes deducciones y corregirlos.

1.	(1)	$\neg T \vee \neg R$	P
	(2)	$S \rightarrow T \ \& \ R$	P
	(3)	$Q \rightarrow S$	P
	(4)	$Q \vee P$	P
	(5)	$\neg(T \ \& \ R)$	DL 1
	(6)	$\neg S$	TP 2, 3
	(7)	$\neg\neg Q$	TT 3, 6
	(8)	P	TP 3, 7
2.	(1)	$\neg S \rightarrow \neg T$	P
	(2)	T	P
	(3)	$S \rightarrow R \ \& \ Q$	P
	(4)	$Q \ \& \ R \rightarrow P$	P
	(5)	$\neg S$	TT 1, 2
	(6)	S	DN 5
	(7)	$R \ \& \ Q$	TT 3, 6
	(8)	$Q \ \& \ R$	A 7
	(9)	P	PP 5, 8
3.	(1)	$T \rightarrow \neg R$	P
	(2)	$S \rightarrow Q$	P
	(3)	$\neg Q \vee R$	P
	(4)	T	P
	(5)	$\qquad\qquad \neg R$	PP 2, 4
	(6)	$\qquad\qquad Q$	TP 3, 5
	(7)	$\qquad\qquad \neg S$	PP 2, 6
	(8)	$\neg S$	CP 4, 7

E. Si los razonamientos siguientes son válidos, dar una demostración formal. Si no son válidos, escribir «no válido» junto a ellos y demostrar la no validez mediante una asignación de certeza.

1. Si $x=0$, entonces $x+y=y$
   Si $y=z$, entonces $x+y\neq y$
   Por tanto, si $x=0$, entonces $y\neq z$.
2. Si $x=0$, entonces $y \nless z$
   O $x\neq 0$ o $x<y$. $y<z$
   Si $z<w$, entonces $x\nless y$
   Por tanto, $z\nless w$.
3. Si $x<y$, entonces $y=z$
   Si $x>y$, entonces $y>z$
   Por tanto, si $x<y$ o $x>y$ y, entonces $y=z$ o $y>z$.
4. Si $x=y$, entonces $y=z$
   Si $y=z$, entonces $x=0$
   Si $x\neq 0$, entonces $w\neq 0$.
   Por tanto, si $w=0$, entonces $x\neq y$.
5. O $x>y$ o $y>x$.
   Si $y>x$, entonces $x\neq 0$
   Si $x\neq 0$, entonces $y\neq w$
   Por tanto, si $y=w$, entonces $x>y$.
6. Si $y=0$, entonces $x>z$.
   Si $x>z$, entonces $z=w$.
   O $y=0$, o $x>z$ y $x=0$
   Por tanto, si $z\neq w$, entonces $x=0$

• 3.6 *Consistencia*

Se consideran las tres proposiciones siguientes:

1. Richard Nixon ganó las elecciones presidenciales de 1960.
2. Mi hermano pequeño puede levantar un peso de dos toneladas.
3. Tomás es más alto que Andrés y Tomás no es más alto que Andrés.

Podremos probablemente convenir en que cada una de las proposiciones es falsa. Sin embargo, sabemos que son falsas por distintas razones.

La primera proposición se sabe que es falsa *de hecho*. Pero, en distintas circunstancias, hubiera podido ser cierta. Se puede decir también que la segunda proposición es falsa, pues ningún muchacho es suficientemente fuerte para levantar este peso en condiciones ordinarias. Todavía se podrían sugerir circunstancias en las que la proposición podría ser cierta; por ejemplo, en un navío espacial donde los objetos no son pesados.

La tercera proposición, sin embargo, *no puede ser cierta,* nunca y en ninguna parte. Es una proposición *lógicamente* imposible. No hace falta conocer el significado de «Tomás es más alto que Andrés» para saber que no puede ser cierta la proposición. Se deduce de su *forma* lógica.

Una proposición de la forma

$$(\mathbf{R}) \ \& \ \neg(\mathbf{R})$$

se denomina una *contradicción.* Se dice que dos proposiciones son contradictorias si una es la negación de la otra. Una contradicción, entonces, es la conjunción de una proposición y su negación. Siempre es falsa. La proposición (3) anterior es de la forma

$$\mathbf{R} \ \& \ \neg\mathbf{R}$$

y, por tanto, es una contradicción.

Con dos diagramas de certeza se puede mostrar fácilmente que una contradicción es *lógicamente* falsa.

R & ¬R	R & ¬R
C C	F F
F	C
F	F

Se ve en ellos que **R** & ¬**R** es falsa cualquiera que sea el valor de certeza de la proposición atómica **R**. No existe ninguna posibilidad de que sea cierta. Esta es la razón por la que se denomina *lógicamente* falsa.

Hay muchas formas que puede tomar una proposición que la hacen lógicamente falsa. Si la proposición no tiene la forma de una contradicción (**R** & ¬**R**), puede reconocerse utilizando las reglas de deducción hasta llegar a una contradicción. Las reglas nunca permiten deducir una conclusión falsa de premisas verdaderas, de manera que si la conclusión es lógicamente falsa, entonces la premisa ha de ser también lógicamente falsa. Esto se ilustra por medio de

Ejemplo a.

(1) ¬(¬S ∨ S) P

Esta proposición no presenta la forma de una contradicción pero se puede deducir

$$\neg\neg S \ \& \ \neg S \qquad \text{DL}$$

y

$$\neg S \ \& \ \neg\neg S \qquad \text{CL.}$$

La línea (3) es de la forma $R \ \& \ \neg R$ y esto demuestra que la premisa no puede ser verdadera.

Otro ejemplo en el que la premisa es lógicamente falsa es:

Ejemplo b.

(1) $(S \rightarrow R) \ \& \ \neg(\neg S \vee R)$	P
(2) $S \rightarrow R$	S 1
(3) $\neg(\neg S \vee R)$	S 1
(4) $S \ \& \ \neg R$	DL 3
(5) S	S 4
(6) $\neg R$	S 4
(7) R	PP 2, 5
(8) $R \ \& \ \neg R$	A 7, 6

Las dos últimas líneas de esta demostración hubieran podido ser:

(7) $\neg S$	TT 2, 6
(8) $S \ \& \ \neg S$	A 5, 7.

No importa, pues, cuál sea la contradicción que en cada caso se ha deducido.

EJERCICIO 9

Simbolizar cada una de las proposiciones siguientes. Decir si son o no lógicamente falsas. Si lo son, deducir una contradicción para demostrarlo.

1. Es jueves o no es jueves.
2. Si Juana es alta, entonces su hermano no es bajo, pero Juana es alta y su hermano es bajo.
3. No ocurre que José gànara la lucha y que José no ganara la lucha.
4. A la vez A no es igual a B y C es igual a B, y si C es igual a B, entonces A es igual a B.
5. $\neg(\neg(x<2 \ \vee \ x=2) \ \vee \ \neg(x \not< 2 \ \ \& \ \ x \neq 2))$

Se sabe que una contradicción, **P** & ¬**P**, es la conjunción de una proposición y su negación. Si una de las proposiciones en la conjunción es una proposición cierta, entonces la otra ha de ser falsa; lógicamente no pueden ser ambas ciertas. Su conjunción, entonces, ha de ser una proposición falsa. Cada dos o más proposiciones que lógicamente no pueden ser ciertas a la vez se dice que son *inconsistentes*. Se dice que forman un conjunto inconsistente de proposiciones y juntas implican una contradicción.

En algunos casos lo que interesa no es deducir una conclusión particular, sino deducir si un conjunto de proposiciones es consistente o inconsistente. Para demostrar que unas premisas son inconsistentes se deduce una contradicción. Utilizando las reglas y métodos de deducción que ya conocemos, si es posible deducir una contradicción a partir de las premisas, se ha obtenido una demostración de que el conjunto de las premisas es inconsistente. Se ha demostrado que no pueden ser todas ciertas a la vez.

El método de demostración es el que se sigue para deducir una conclusión. En este caso, sin embargo, no se pretende deducir una conclusión particular, sino una contradicción cualquiera. No importa cual sea la contradicción deducida. Puede ser una proposición cualquiera que tenga la forma **P** & ¬**P**.

Ejemplo c.

(1) Si Antonio gana la carrera, entonces Juan queda segundo.
(2) Antonio gana la carrera.
(3) Juan no queda segundo.

Se puede ver que estas tres proposiciones no pueden ser verdaderas simultáneamente. Sin embargo, cada dos de ellas pueden ser verdaderas a la vez. Se pueden traducir:

(1) **D** → **J**
(2) **D**
(3) ¬**J**

Cualquiera de las dos demostraciones siguientes muestran que son inconsistentes.

(1) **D** → **J**	P	(1) **D** → **J**	P
(2) **D**	P	(2) **D**	P
(3) ¬**J**	P	(3) ¬**J**	P
(4) **J**	PP 1, 2	(4) ¬**D**	TT 1, 3
(5) **J** & ¬**J**	A 3, 4	(5) **D** & ¬**D**	A 2, 4

Ejemplo d.

(1) Si la región está cerca del ecuador, entonces el sol está siempre próximo al zénit.
Si el sol está siempre próximo al zénit, entonces la región tiene un clima tropical cálido.
Si la región tiene latitud grande, entonces no tiene clima tropical cálido.
Esta región está cerca del ecuador y tiene latitud grande.

La deducción siguiente muestra que es posible deducir una contradicción (línea 10) utilizando las reglas de inferencia lógica. Se tiene así una demostración de que las premisas del ejemplo son inconsistentes.

(1)	$E \rightarrow S$	P
(2)	$S \rightarrow H$	P
(3)	$A \rightarrow \neg H$	P
(4)	$E \& A$	P
(5)	A	S 4
(6)	$\neg H$	PP 3, 5
(7)	E	S 4
(8)	$E \rightarrow H$	HS 1, 2
(9)	H	PP 7, 8
(10)	$H \& \neg H$	A 6, 9

Otro ejemplo de una deducción que muestra que las premisas simbolizadas son inconsistentes es:

Ejemplo e.

(1)	$\neg(\neg Q \vee P)$	P
(2)	$P \vee \neg R$	P
(3)	$Q \rightarrow R$	P
(4)	$\neg\neg Q \& \neg P$	DL 1
(5)	$\neg\neg Q$	S 4
(6)	Q	DN 5
(7)	R	PP 3, 6
(8)	$\neg P$	S 4
(9)	$\neg R$	TP 2, 8
(10)	$R \& \neg R$	A 7, 9

Ejercicio 10

A. Demostrar que los conjuntos de premisas siguientes son *inconsistentes* deduciendo una contradicción para cada uno.

1. (1) $\neg Q \rightarrow R$
   (2) $\neg R \vee S$
   (3) $\neg(P \vee Q)$
   (4) $\neg P \rightarrow \neg S$

2. (1) $T \rightarrow P$
   (2) $T \ \& \ R$
   (3) $Q \rightarrow \neg R$
   (4) $P \vee S \rightarrow Q$

3. (1) $R \rightarrow R \ \& \ Q$
   (2) $\neg S \vee R$
   (3) $\neg T \vee \neg Q$
   (4) $S \ \& \ T$

4. (1) $T \vee \neg R$
   (2) $\neg(R \rightarrow S)$
   (3) $T \rightarrow S$

5. (1) $Q \rightarrow P$
   (2) $\neg(P \vee R)$
   (3) $Q \vee R$

6. (1) $x=1 \ \rightarrow \ y<x$
   (2) $y<x \ \rightarrow \ y=0$
   (3) $\neg(y=0 \ \vee \ x\neq 1)$

7. (1) $x=y \ \rightarrow \ x<4$
   (2) $x \nless 4 \ \vee \ x<z$
   (3) $\neg(x<z \ \vee \ x\neq y)$

8. (1) $2\times 5=5+5 \ \leftrightarrow \ 2\times 6=6+6$
   (2) $3\times 4=10 \ \leftrightarrow \ 4\times 3=10$
   (3) $3\times 4=10 \ \vee \ 2\times 6=6+6$
   (4) $2\times 5\neq 5+5 \ \& \ 4\times 3\neq 10$

9. (1) $x<y \quad \rightarrow \quad x\neq y$
   (2) $y>z \quad \rightarrow \quad z\nless y$
   (3) $x=y \quad \& \quad y>z$
   (4) $x<y \quad \vee \quad z<y$

10. (1) $x=0 \quad \leftrightarrow \quad x+y=y$
    (2) $x>1 \quad \& \quad x=0$
    (3) $x \cdot y=y \quad \rightarrow \quad x\not> 1$

Supóngase que no se sabe si un conjunto de premisas es consistente o inconsistente. Se intenta deducir una contradicción y no se logra. El hecho de no poder probar la inconsistencia deduciendo una contradicción no es una demostración de que las premisas son consistentes. Se necesita un método o técnica definida para la demostración de la consistencia de un conjunto de premisas. El método de asignación de certeza es la técnica apropiada.

Al decir que las premisas son inconsistentes se quiere indicar que no pueden ser simultáneamente ciertas. Por tanto, si es posible encontrar, por lo menos, una asignación de certeza en la que todas las premisas sean ciertas a la vez, entonces sabemos que no son inconsistentes. Una asignación de certeza en la que todas las premisas son ciertas da una demostración de que el conjunto de estas premisas es consistente. Consideremos las premisas:

Si Juana es joven, entonces Rosa es vieja.
Si Rosa es vieja, entonces Marta es joven.
Marta no es joven.

Para demostrar su consistencia se empieza simbolizando las proposiciones para poner de manifiesto su forma. Después se busca una asignación de certeza que hará verdaderas todas las proposiciones:

$J \rightarrow L$
$L \rightarrow M$
$\neg M$

C F
J
L
M

Premisas: $J \rightarrow L$ $\qquad$ $L \rightarrow M$ $\qquad$ $\neg M$

F F $\qquad$ F F $\qquad$ F
C $\qquad$ C $\qquad$ C

Estos diagramas demuestran que es posible que todas las premisas sean ciertas en una asignación de certeza para las letras atómicas, lo que demuestra que las premisas son consistentes. La estrategia seguida en este ejemplo es la siguiente. Se observa en primer lugar que para hacer cierta la premisa $\neg$**M** se ha de asignar la F de falsa a la **M**. Entonces, para que la premisa **L** $\rightarrow$ **M** sea cierta se ha de asignar la F a la **L**, , porque al consecuente **M** se le ha asignado la F de falso. Habiendo asignado la F a **L**, para hacer cierta la premisa **J** $\rightarrow$ **L** se ha de asignar la F a **J**, que completa las asignaciones de certeza para las proposiciones atómicas. Después se completan los diagramas de certeza, y se comprueba que estas asignaciones de certeza hacen, en efecto. ciertas las premisas conjuntamente.

EJERCICIO 11

A. Demostrar que los siguientes conjuntos de premisas son *consistentes* presentando interpretaciones en las que todas las premisas sean ciertas:

1. (1) $Q \,\&\, \neg S$
   (2) $\neg(P \lor S)$
   (3) $Q \rightarrow T$

2. (1) $P \rightarrow Q$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $\neg R \lor S$

3. (1) $T \rightarrow R$
   (2) $\neg R \rightarrow S$
   (3) $S \lor T$

4. (1) $\neg P \lor \neg R$
   (2) $\neg P \rightarrow S$
   (3) $\neg S$

5. (1) $R \rightarrow Q$
   (2) $P \rightarrow Q$
   (3) $Q \rightarrow \neg T$

6. (1) $3 \times 5 = 12 \;\rightarrow\; 6+8=11$
   (2) $6+8=11 \;\rightarrow\; 13-9=7$
   (3) $3 \times 5 \neq 12 \;\&\; 13-9=7$

B. Para cada uno de los conjuntos de premisas siguientes, decidir si son consistentes o inconsistentes. Demostrar la respuesta.

1. Si María es la mayor, entonces José es más joven que Susana.
   María es la mayor e Isabel no es mayor que Susana.
   No ocurre que o Susana es la mayor o Isabel es mayor que Susana.
2. A es el vencedor y C no es el tercero.
   Si A es el vencedor, entonces B es el cuarto.
   Si C no es el tercero, entonces B no es el cuarto.
3. Juan está en la biblioteca y no ocurre que Tomás está en la clase de Historia o que Luis está en la clase de Historia.
   Si Pedro está en el laboratorio de Química, entonces Luis está en la clase de Historia.
   Si Miguel está en la clase de Geometría, entonces Tomás está en la clase de Historia.

(1)	$\neg Q \vee R$	P
(2)	$P \rightarrow \neg R$	P
(3)	Q	P
(4)	$\quad P$	P
(5)	$\quad \neg R$	PP 2, 4
(6)	$\quad \neg Q$	TP 1, 5
(7)	$\quad Q \;\&\; \neg Q$	A 3, 6
(8)	$P \rightarrow Q \;\&\; \neg Q$	CP 4, 7
(9)	$\neg P$	Ab 8

Obsérvese que ésta es una demostración condicional. La premisa que se añade es la negación de la conclusión que se desea. En cada demostración indirecta se deduce una contradicción, como en la línea (7) del ejemplo, de una premisa añadida, línea (4), y siempre se infiere la negación de la premisa añadida, línea (9). Si se utiliza sólo la ley del absurdo, entonces se necesitaría siempre un paso condicional como en la línea (8), antes de poder inferir la negación de la premisa añadida. Pero la regla de la demostración indirecta permite combinar este paso de demostración condicional y el uso de la ley de absurdo en un solo paso. No hace falta escribir la línea CP.

La regla de demostración indirecta (RAA) se expresa:

> *Si se puede deducir una contradicción de un conjunto de premisas y de la negación de* S, *entonces* S *puede deducirse del conjunto de premisas solo.*

Se utilizan las letras «RAA» (por *reducción al absurdo)* para refirirse a la regla de demostración indirecta.

Los pasos utilizados en una demostración indirecta son:

(1) Introducir la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa.
(2) De esta nueva premisa, junto con las premisas dadas, deducir una contradicción.
(3) Establecer la conclusión deseada como una inferencia lógica deducida de las premisas originales.

El ejemplo que sigue ilustra el uso de una demostración indirecta para llegar a la conclusión deseada. La conclusión deseada es $\neg D$.

(1)	$D \rightarrow W$	P
(2)	$A \vee \neg W$	P
(3)	$\neg(D \;\&\; A)$	P

(4)		D	P
(5)		W	PP 1, 4
(6)		A	TP 2, 5
(7)		$\neg D \vee \neg A$	DL 3
(8)		$\neg A$	TP 4, 7
(9)		$A \& \neg A$	A 6, 8
(10)	$\neg D$		RAA 4, 9

Examinemos la deducción anterior y observemos los tres pasos que siempre se dan en una demostración indirecta. El primer paso, la introducción de la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa, se ve en la línea (4), pues D es la negación de $\neg D$. El segundo paso, la deducción de una contradicción de la nueva premisa junto con las premisas dadas se consigue entre las líneas (5) y (9). La línea (9), $A \& \neg A$, es la contradicción deducida. El tercer paso, estableciendo la conclusión deseada como una inferencia de las premisas, se encuentra en la línea (10). Nuestra conclusión $\neg D$, se deduce por RAA de las premisas, teniendo en cuenta la premisa añadida en (4) y de la contradicción deducida de ella en (9) Al añadir la nueva premisa en la línea (4) la demostración se ha corrido hacia la derecha.

Una demostración subordinada indica que cada deducción del conjunto de premisas más la premisa añadida depende de la premisa añadida en adición con las tres originales. La conclusión de ella se ha retrocedido alineándola por la izquierda con el conjunto original de premisas, para indicar que se ha deducido lógicamente del conjunto original de premisas solamente. Una demostración subordinada puede terminarse sólo si se aplica CP o RAA.

Se considera otro ejemplo del uso de una demostración indirecta. En un juego de «baseball» se razona de la siguiente forma:

> Si Juan juega como primera base y Bill juega como lanzador contra nosotros, entonces el «Universitario» ganará.
> O el «Universitario» no ganará o el equipo terminará a la cabeza de la clasificación.
> El equipo no terminará a la cabeza de la clasificación.
> Además, Juan jugará como primera base.
> Por tanto, Bill no lanzará contra nosotros.

Para poner de manifiesto que basta una contradicción cualquiera que se obtenga, se dan dos demostraciones formales por RAA.

(1)	$J \& B \rightarrow S$	P
(2)	$\neg S \vee T$	P
(3)	$\neg T$	P

(4)	J		P
(5)		B	P
(6)		$J \& B$	A 4, 5
(7)		$\neg S$	TP 2, 3
(8)		$\neg(J \& B)$	TT 1, 7
(9)		$(J \& B) \& \neg(J \& B)$	A 6, 8
(10)	$\neg B$		RAA 5, 9

(1)	$J \& B \rightarrow S$		P
(2)	$\neg S \vee T$		P
(3)	$\neg T$		P
(4)	J		P
(5)		B	P
(6)		$\neg S$	TP 2, 3
(7)		$\neg(J \& B)$	TT 1, 6
(8)		$\neg J \vee \neg B$	DL 7
(9)		$\neg B$	TP 8, 4
(10)		$B \& \neg B$	A 5, 9
(11)	$\neg B$		RAA 5, 10

Obsérvese en la segunda demostración que la línea (9) es $\neg B$, la conclusión deseada. Pero la demostración no es todavía completa porque está en una demostración subordinada, depende de la premisa añadida, no sólo de las premisas originales.

En el ejemplo que se acaba de dar, la conclusión se dedujo por demostración indirecta. La adición de B como una premisa conduce a una contradicción y, por tanto, podría concluirse la negación de B, $\neg B$. En el mismo ejemplo se hubiera podido deducir $\neg B$ por una demostración directa sin añadir una premisa. Ambos métodos son correctos. Como en todo juego, hay muchos movimientos diferentes permitidos por las reglas. La cuestión está en hacer los movimientos que conducirán a la meta, que es la conclusión deseada.

No existe ninguna regla general que nos diga exactamente cuándo se ha de usar una demostración directa y cuándo se ha de usar una demostración indirecta. En general, una demostración indirecta viene sugerida por un conjunto de premisas del cual no se ve fácilmente un punto de partida para la demostración. En tal situación, tal vez añadiendo una premisa: la negación de la conclusión deseada, se pueda encontrar el lugar por donde empezar. El segundo ejemplo de esta sección sobre demostraciones indirectas ilustra este dilema. En las premisas dadas se encontraban sólo condicionales y disjunciones de manera que no se encontraba punto de partida. Sin embargo, añadiendo una premisa, se tiene una proposición atómica que abre el camino a otros movimientos que conducen eventualmente a la conclusión.

EJERCICIO 12

A. Demostrar que las conclusiones siguientes son válidas utilizando una *demostración indirecta.*

1. Demostrar: $\neg P$
   (1) $\neg(P \ \& \ Q)$
   (2) $P \rightarrow R$
   (3) $Q \vee \neg R$

2. Demostrar: $\neg T$
   (1) $T \rightarrow \neg S$
   (2) $F \rightarrow \neg T$
   (3) $S \vee F$

3. Demostrar: R
   (1) $\neg(P \ \& \ Q)$
   (2) $\neg R \rightarrow Q$
   (3) $\neg P \rightarrow R$

4. Demostrar: $\neg(A \ \& \ D)$
   (1) $A \rightarrow B \vee C$
   (2) $B \rightarrow \neg A$
   (3) $D \rightarrow \neg C$

5. Demostrar: $\neg E \vee M$
   (1) $S \vee O$
   (2) $S \rightarrow \neg E$
   (3) $O \rightarrow M$

6. Demostrar: $\neg T$
   (1) $P \vee Q$
   (2) $T \rightarrow \neg P$
   (3) $\neg(Q \vee R)$

7. Demostrar: $\neg(T \vee S)$
   (1) $\neg R \vee \neg B$
   (2) $T \vee S \rightarrow R$
   (3) $B \vee \neg S$
   (4) $\neg T$

8. Demostrar: $\neg P$
   (1) $P \rightarrow \neg S$
   (2) $S \vee \neg R$
   (3) $\neg(T \vee \neg R)$

9. Demostrar: $\neg S \vee \neg T$
   (1) $\neg P \rightarrow \neg S$
   (2) $\neg P \vee R$
   (3) $R \rightarrow \neg T$

10. Demostrar: R
    (1) $T \ \& \ R \leftrightarrow \neg S$
    (2) $\neg S \rightarrow T$
    (3) $\neg R \rightarrow \neg S$

11. Demostrar: $\neg(y=1 \rightarrow x^2 \not> xy)$
    (1) $x=1 \vee \neg(x+y=y \vee x \not> y)$
    (2) $x>y \rightarrow x^2>xy \ \& \ y=1$
    (3) $x \neq 1$

12. Demostrar: $\neg(x=2 \leftrightarrow x=y)$
    (1) $x<y \rightarrow xy=x$
    (2) $x\neq y \ \& \ xy\neq x$
    (3) $x\nless y \lor y=1 \rightarrow x=2$

13 Demostrar: $2x=12 \rightarrow y=4$
    (1) $2x+3y=24$
    (2) $(x=6 \rightarrow y=4) \lor 2x=12$
    (3) $(2x=12 \rightarrow x=6) \lor 2x+3y\neq 24$
    (4) $x\neq 6$

14. Demostrar: $x=0$
    (1) $\neg(y\neq 1 \lor z\neq -1)$
    (2) $(x<y \ \& \ x>z) \ \& \ z=-1 \rightarrow x=0$
    (3) $\neg(y=1 \lor x=0) \lor (x<y \ \& \ x>z)$

15. Demostrar: $x=0$
    (1) $y=1 \rightarrow x=0 \lor x>y$
    (2) $z=-1 \rightarrow x=0 \lor x<z$
    (3) $x\ngtr y$
    (4) $x\nless z$
    (5) $y=1 \lor z=-1$

B. En la Sección **A** anterior se podía deducir la conclusión utilizando demostraciones indirectas. ¿Se podría dar una demostración directa en cada uno de los ejemplos de la Sección **A**? Si es así, indicar una demostración directa en la forma típica para cada ejemplo donde el método directo sea posible.

C. Cada una de las deducciones siguientes contiene errores. Hallar todos los errores y hacer las correcciones necesarias.

1. Demostrar: $\neg(\mathsf{V} \ \& \ \mathsf{R})$

(1) $\mathsf{V} \rightarrow \mathsf{T}$	P
(2) $\mathsf{T} \rightarrow \mathsf{S}$	P
(3) $\mathsf{R} \rightarrow \neg\mathsf{S}$	P
(4) $\mathsf{V} \ \& \ \mathsf{R}$	P
(5) T	TP 1, 4
(6) $\neg\mathsf{S}$	PP 2, 5
(7) R	S 4
(8) $\neg\neg\mathsf{S}$	PP 3, 7
(9) $\neg\mathsf{S} \ \& \ \neg\neg\mathsf{S}$	A 6, 8

(10) $V \& R \rightarrow \neg S \& \neg\neg S$	CP 4, 9
(11) $V \& R$	RAA 10

2. Demostrar: $\neg(T \vee P)$

(1) $\neg T \vee \neg R$	P
(2) $\neg R \rightarrow S$	P
(3) $\neg S \& \neg P$	P
(4) $\neg R$	S 1
(5) $\neg S$	PP 2, 4
(6) $\neg\neg R$	TT 2, 5
(7) T	TP 1, 6
(8) $\neg P$	S 3
(9) $T \& \neg P$	A 7, 8
(10) $\neg(T \vee P)$	DL 9

● 3.8 *Resumen*

Hemos aprendido a demostrar la validez de inferencia casi de forma análoga a como se aprende a jugar un juego. Se parte de premisas dadas y el objetivo es alcanzar una conclusión particular. El camino que se sigue para ello es deducir proposiciones, de otras proposiciones que ya se han obtenido utilizando las reglas de inferencia. Cada movimiento que se realiza ha de estar permitido por una regla.

En una demostración formal se ha de justificar cada paso que se dé haciendo referencia a una regla de inferencia. También se ha de indicar las proposiciones de las que se ha deducido la nueva proposición. Las reglas permiten hacer muchos movimientos, pero la estrategia estriba en hacer aquellos que conducen al objetivo, la conclusión deseada.

La idea de inferencia se resume en esta forma:

De premisas ciertas se obtienen sólo conclusiones ciertas.

Puesto que las reglas de inferencia válida, permiten deducir sólo consecuencias ciertas de premisas ciertas, si se encuentra un caso en el que se ha deducido una conclusión falsa de premisas ciertas se sabe que la inferencia no es válida. Así, si se asignan valores de certeza a las proposiciones atómicas de manera que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa, se ha demostrado la no validez del razonamiento.

Además del método directo de demostración se puede utilizar con frecuencia la regla que permite introducir una premisa en la demostración. En una demostración condicional, por ejemplo, se introduce el antecedente de la conclusión (cuando es una proposición condicional) como premisa, y, si se puede deducir el consecuente, entonces se ha demostrado que la proposición condicional es consecuencia de las premisas originales. En una demostración indirecta, si introduciendo la negación de la conclusión deseada se puede deducir una contradicción de la forma $\mathsf{P} \ \& \ \neg\mathsf{P}$, entonces se puede afirmar la conclusión deseada por la regla de *reducción al absurdo*.

Algunas veces no se desea deducir una conclusión de un conjunto de premisas, y lo que se busca es determinar si un conjunto de premisas es consistente o inconsistente. Se demuestra que las premisas son inconsistentes si se puede deducir de ellas una contradicción de la forma $\mathsf{P} \ \& \ \neg\mathsf{P}$. Entonces se sabe que todas las premisas no pueden ser simultáneamente ciertas. Para demostrar la consistencia de premisas se halla una asignación de certeza en la que todas las premisas *sean* simultáneamente ciertas.

La teoría de la inferencia, de la que nos hemos ocupado hasta ahora, es la teoría proposicional de inferencia.

Ejercicio 13

Ejercicios de repaso

A. En cada uno de los ejercicios siguientes, primero expresar las proposiciones con símbolos lógicos y después establecer y demostrar si son lógicamente falsas deduciendo una contradicción, o posiblemente ciertos como resultaría de una asignación de valores de certeza.

1. Hay cincuenta estados en los Estados Unidos, pero si los Estados Unidos no hubieran comprado Alaska a Rusia, entonces no habría cincuenta estados en los Estados Unidos.
2. No ocurre que o Juan toca la trompeta o no toca ningún instrumento, entonces Juan toca la trompeta.
3. A Luis le gusta el latín y no le gusta el latín.
4. $(\neg\mathsf{P} \ \& \ \mathsf{Q}) \ \& \ (\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{P})$.
5. $(\mathsf{P} \ \& \ \mathsf{Q}) \rightarrow (\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \vee \mathsf{R})$
6. $\neg[(\neg\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \vee (\neg\mathsf{P} \vee \neg\mathsf{Q})]$
7. $\mathsf{P} \rightarrow \neg\mathsf{P}$
8. $\neg(\mathsf{P} \vee \neg\mathsf{P})$
9. $(x=3 \ \rightarrow \ x<4) \ \& \ x\neq 3$
10. $\neg((1=2 \ \rightarrow \ 2=1) \ \rightarrow \ 1\neq 2)$

B. Expresar los conjuntos siguientes de proposiciones en símbolos lógicos y después establecer y demostrar si son consistentes o inconsistentes.

1. Si Alicia está bien, entonces su temperatura no es 37,6.
   Alicia está bien si y sólo si su temperatura es 37,6.
   Pero si está bien y su temperatura no es 37,6 entonces ella no está bien.
2. Los nitratos se forman del nitrógeno atmosférico libre o los nitratos se forman de las proteínas descompuestas en el suelo.
   Si los nitratos se forman del nitrógeno atmosférico libre, entonces este proceso de formación de nitratos se denomina fijación del nitrógeno.
   El proceso no incluye liberación de amoníaco de las proteínas descompuestas.
   Si el proceso no incluye liberación de amoníaco de las proteínas descompuestas, entonces los nitratos no están formados de las proteínas descompuestas en el suelo.
3. No ocurre que o Juan compra una raqueta de tenis o compra una pelota de tenis.
   O Juan compra una pelota de tenis o no está satisfecho con la raqueta que ya tiene.
   Si Juan no compra una raqueta de tenis, entonces está satisfecho con la raqueta que ya tiene.
4. Si Antonio visita a José, entonces Pablo visita a Pedro.
   Si Pablo no visita a Pedro, entonces o Antonio y Pablo van al cine o acaban su trabajo de inglés.
   Pero Antonio y Pablo no acaban su trabajo de inglés.
   Además, Antonio y Pablo van al cine y Antonio no visita a José.
5. Si un hilo en un circuito eléctrico se funde y el hilo de otro no se funde, entonces el primer hilo tiene una resistencia más elevada, o ha pasado por él una corriente de mayor intensidad. Si el primer hilo tiene mayor resistencia, entonces una mayor cantidad de energía en el primer circuito se convirtió en calor.
   Si una corriente de mayor intensidad ha circulado por él, entonces una mayor cantidad de energía en el primer circuito se convirtió en calor.
   No ocurre que una mayor cantidad de energía eléctrica en el primer circuito se convirtiera en calor.
   No ocurre que un hilo en un circuito eléctrico se funda y el hilo en otro no se funda.

6. (1) $E \rightarrow G \vee H$
   (2) $J \rightarrow \neg H$
   (3) $G \& H$
   (4) $G \rightarrow \neg E$

7. (1) $P \& Q$
   (2) $P \rightarrow \neg R$
   (3) $\neg R \& S \rightarrow \neg Q$
   (4) $Q \rightarrow S$

8. (1) $U \rightarrow W \vee (R \vee S)$
   (2) $W \vee R \rightarrow \neg U$
   (3) $U \,\&\, \neg S$

9. (1) $P \rightarrow Q \vee R$
   (2) $Q \rightarrow \neg P$
   (3) $R \rightarrow \neg P$

10. (1) $x \neq y \;\;\&\;\; y \neq z$
    (2) $\neg(x = z \;\vee\; x < z)$
    (3) $z = 2 \;\rightarrow\; y = z$
    (4) $x < z \;\vee\; z = 2$

C. En cada uno de los ejemplos que siguen, demostrar en forma típica completa que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas o dar una asignación de certeza para mostrar que la conclusión no se deduce lógicamente.

1. Si el palo empieza a golpear al perro, entonces el perro empieza a morder al cerdo.
   Si el perro empieza a morder al cerdo, entonces el cerdo saltará sobre el portillo.
   El palo empieza a golpear al perro.
   Por tanto, el cerdo saltará sobre el portillo.
2. Si el freno falla o el camino está helado, entonces el coche no parará.
   Si el coche se revisó, entonces no fallarán los frenos.
   Pero el coche no se revisó.
   Por tanto, el coche no parará.
3. Si se ha construido una presa para suministrar potencia hidroeléctrica, entonces la industria fabril aumentará considerablemente.
   Si no se ha construido una presa para suministrar potencia hidroeléctrica, entonces la economía se ha de basar totalmente en productos agrícolas.
   Por tanto, o la industria fabril aumentará considerablemente o la economía se ha de basar totalmente en productos agrícolas.
4. O no hay muchos gatos o hay pocos ratones.
   Hay muchas flores.
   Si hay pocos ratones y hay muchas flores habrá muchos abejorros.
   Por tanto, hay muchos gatos o habrá muchos abejorros.
5. Si el punto de una recta representa un entero, entonces el número se puede definir por un decimal infinito o por un par de decimales infinitos.
   O el número se puede definir por un decimal finito o el número puede ser definido o bien por un decimal infinito o por un par de decimales infinitos.
   El número no puede ser definido por un decimal finito.
   Por tanto, el punto en la recta representa un entero.

6. Un gas denso (clorhídrico) se introduce en un frasco y sobre él se coloca un frasco que contenga un gas de menor densidad (amoníaco). Si los gases se mezclan por difusión, entonces el clorhídrico ha subido y el amoníaco ha descendido.
   Si el clorhídrico ha subido y el amoníaco ha descendido, entonces el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad.
   Si el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad, entonces el movimiento ha de ser debido al movimiento molecular.
   Por tanto, el movimiento ha de ser debido al movimiento molecular.

7. Demostrar: $\neg B \rightarrow \neg Q$
   (1) $R \rightarrow N$
   (2) $K \rightarrow B \vee R$
   (3) $Q \vee M \rightarrow K$
   (4) $\neg N$

8. Demostrar: $\neg J \vee C$
   (1) $J \vee S \rightarrow C \ \& \ V$

9. Demostrar: P
   (1) $R \vee Q \rightarrow \neg P$
   (2) $S \rightarrow \neg Q$
   (3) $\neg R \ \& \ S$

10. Demostrar: $B \vee C$
    (1) $A \rightarrow B$
    (2) $C \rightarrow D$
    (3) $A \vee D$

11. Demostrar: $G \vee J \rightarrow H \vee K$
    (1) $G \rightarrow H$
    (2) $J \rightarrow K$

12. Demostrar: C
    (1) $W \rightarrow F$
    (2) $F \ \& \ C \leftrightarrow W$
    (3) $\neg C \rightarrow W$

13. Demostrar: $C \ \& \ \neg D$
    (1) $A \ \& \ C \rightarrow B$
    (2) $\neg A \vee (C \vee D)$
    (3) $A \ \& \ B$

14. Demostrar: $P \ \& \ Q$
    (1) $P \leftrightarrow Q$
    (2) $P \vee Q$

15. Demostrar: $\neg S \rightarrow \neg R$
    (1) $R \rightarrow \neg Q$
    (2) $R \vee Q$
    (3) $R \rightarrow S$

16. Demostrar: $M \leftrightarrow N$
    (1) $M \vee N$
    (2) $N \leftrightarrow (M \rightarrow P)$
    (3) $P \vee (N \ \& \ Q)$
    (4) $Q \leftrightarrow (P \rightarrow N)$

17. Demostrar: $x=3$
    (1) $x^2-5x+6=0 \quad \vee \quad x^2-7x+12=0$
    (2) $x^2-7x+12=0 \quad \leftrightarrow \quad x=3 \quad \vee \quad x=4$
    (3) $x^2-5x+6=0 \quad \leftrightarrow \quad x=3 \quad \vee \quad x=2$

18. Demostrar: $z=3$
    (1) $x<y \quad \& \quad y<z \quad \rightarrow \quad x<z$
    (2) $(y<z \quad \rightarrow \quad x<z) \quad \rightarrow \quad z=3$
    (3) $x<y$

19. Demostrar: $x \nless z$
    (1) $x=y \quad \rightarrow \quad x \neq 0$
    (2) $x=y \quad \& \quad z=-1$
    (3) $x<z \quad \rightarrow \quad x \neq 0$

20. Demostrar: $\neg(2x+2y=8 \quad \leftrightarrow \quad y=2)$
    (1) $y=2 \quad \rightarrow \quad 4x+y=6$
    (2) $y=3 \quad \rightarrow \quad 2x+2y=8$
    (3) $\neg(4x+y=6 \quad \vee \quad y \neq 3)$

Examen de repaso

I. Demostrar, mediante asignación de certeza o deducción, si cada una de las fórmulas es posiblemente cierta o lógicamente falsa.

a. $(P \leftrightarrow Q) \ \& \ (P \ \& \ \neg Q)$
b. $P \ \& \ \neg[(P \vee Q) \vee R]$
c. $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow Q$
d. $(x \nless y \quad \rightarrow \quad y=x) \quad \& \quad (y=x \quad \rightarrow \quad x<y)$
e. $x=3 \quad \& \quad \neg(x \neq y \quad \vee \quad x=3)$

II. Demostrar, mediante asignación de certeza o deducción, si cada uno de los conjuntos de premisas siguientes es consistente o inconsistente.

a. (1) $\neg P \vee Q$
(2) $\neg R \rightarrow \neg Q$
(3) $P \rightarrow R$

b. (1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
(2) $P \ \& \ \neg R$
(3) Q

c. (1) $P \rightarrow Q$
(2) $R \rightarrow S$
(3) $P \vee G$
(4) $Q \ \& \ S$

d. (1) $A \rightarrow (B \ \& \ C)$
(2) $D \rightarrow (A \vee E)$
(3) $E \rightarrow (C \rightarrow F)$
(4) $\neg D \vee \neg F$

e. (1) $P \rightarrow Q \vee \neg R$
(2) $P \rightarrow R$
(3) $P \rightarrow \neg Q$
(4) P

f. (1) $x \neq 1$
(2) $x+y \neq y \quad \rightarrow \quad x>0$
(3) $\neg(x>0 \quad \vee \quad y \neq 1)$
(4) $x+y=y \quad \leftrightarrow \quad x \neq 1$

III. Deducir, si es posible, la conclusión deseada de las premisas dadas en cada una de las siguientes. Si la conclusión no es consecuencia, escribir «no válida» y dar una asignación de certeza que lo demuestre.

a. O Francia era una monarquía en 1780 o Francia era una república en 1780.
Si Francia era una monarquía en 1780, entonces la Revolución americana precede a la Revolución francesa.
Francia no era una república en 1780.
Por tanto, la Revolución americana precede a la Revolución francesa.

b. Si el ángulo alfa es igual al ángulo beta, entonces el ángulo beta es igual a 45°.
Si el ángulo beta es igual a 45°, entonces el ángulo theta es igual a 90°.
O el ángulo beta es recto o el ángulo beta no es igual a 90°
El ángulo theta no es recto.
Por tanto, el ángulo alfa no es igual al ángulo beta.

c. Si Julio elige a Tomás como director de la campaña electoral, entonces ganará las elecciones. Si Julio no gana las elecciones, entonces continuará como editor del periódico.
Si continúa como editor del periódico, entonces Pablo será el editor asociado.
Por tanto, o Pablo será el editor asociado o Julio no elige a Tomás como director de su campaña electoral.

d. Demostrar: $\neg P$
(1) $P \rightarrow Q$
(2) $R \vee \neg Q$
(3) $\neg P \vee \neg R$

e. Demostrar: $C \vee \neg A$
(1) $A \rightarrow B$
(2) $\neg B \rightarrow C \vee D$
(3) $\neg D$

f. Demostrar: $\neg E$
(1) $E \rightarrow (G \vee H)$
(2) $G \rightarrow (H \rightarrow K)$
(3) $\neg L$

g. Demostrar: N
(1) $L \vee (M \& N)$
(2) $L \rightarrow N$

h. Demostrar: $A \rightarrow (C \rightarrow E)$
(1) $A \vee B \rightarrow (C \vee D \rightarrow E)$

i. Demostrar: $P \rightarrow S$
(1) $P \rightarrow Q$
(2) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
(3) $Q \rightarrow (R \rightarrow S)$

j. Demostrar: $x > y \rightarrow x = 5$
(1) $x - y = 2 \rightarrow (y = 3 \rightarrow x = 5)$
(2) $x \ngtr y \lor x - y = 2$
(3) $y = 3$

Demostrar: $xy - y \rightarrow$
(1) $x \ngtr y \rightarrow y = 2$
(2) $xy = y \lor x^2 = y \rightarrow x = 1$
(3) $x^2 = y \rightarrow$
(4) $-\qquad \lor x \neq 1)$

l. Demostrar: $x = 1$
(1) $x = 1 \leftrightarrow x = y$
(2) $x = y \lor y \neq 1$
(3) $y \neq 1 \;\&\; x < y$

IV. Completar las demostraciones formales siguientes, poniendo en cad línea las abreviaturas de las reglas utilizadas y los números de las líneas partir de las cuales se han aplicado estas reglas.

Ejemplo:	(1) $\neg R \rightarrow S$	P
	(2) $\neg R$	P
	(3) S	PP 1, 2

a. 1) $x < y \;\&\; y \neq z$
2) $y \neq z$

b. 1) $S \leftrightarrow \neg R$
2) $(S \rightarrow R) \;\&\; (R \rightarrow S)$

c. 1) $\neg R \lor \neg R$
2) $\neg R$

d. 1) $\neg S \lor P$
2) $\qquad \neg P$
3) $\qquad \neg S$
4) $\neg P$

e. 1) $\neg A \rightarrow \neg(B \lor \neg C)$
2) $\neg\neg B$
3) B
4) $B \lor \neg C$
5) $\neg\neg A$

f. (1) $M \rightarrow \neg(P \vee Q)$
(2) $\neg(P \vee Q) \rightarrow N$
(3) $M \rightarrow N$

g. (1) $x+y=3 \quad \vee \quad (y=2 \quad \rightarrow \quad x+y=5)$
(2) $(y=2 \quad \rightarrow \quad x+y=5) \quad \vee \quad x+y=3$

h. (1) $R \rightarrow \neg Q$
(2) $Q \vee P$
(3) $\qquad \neg(\neg R \vee P)$
(4) $\qquad R \;\&\; \neg P$
(5) $\qquad R$
(6) $\qquad \neg Q$
(7) $\qquad P$
(8) $\qquad \neg P$
(9) $\qquad P \;\&\; \neg P$
(10) $\neg R \vee P$

i. (1) $(x \neq 3 \quad \vee \quad y=2) \quad \& \quad x>y$
(2) $(x=3 \quad \rightarrow \quad x=y) \quad \rightarrow \quad x \ngtr y$
(3) $\qquad y=2 \quad \rightarrow \quad x=y$
(4) $\qquad x \neq 3 \quad \vee \quad y=2$
(5) $\qquad\qquad x=3$
(6) $\qquad\qquad y=2$
(7) $\qquad x=3 \quad \rightarrow \quad y=2$
(8) $\qquad x=3 \quad \rightarrow \quad x=y$
(9) $\qquad x \ngtr y$
(10) $\qquad x>y$
(11) $\qquad x>y \quad \& \quad x \ngtr y$
(12) $\neg(y=2 \quad \rightarrow \quad x=y)$

j. (1) $\neg R \vee S$
(2) $\neg R \rightarrow A \;\&\; B$
(3) $S \rightarrow C$
(4) $(A \;\&\; B) \vee C$