Tarea 8 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 17 de Mayo del 2017, Grupo B 16 de Mayo 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Hallar el valor de la integral

$$\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$$

sobre las circunferencias recorridas en sentido positivo. a)$|z-2|=2$, b)$|z|=4$.

2.- Hallar el valor de la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

sobre las circunferencias recorridas en sentido positivo. a)$|z+2|=3$, b)$|z|=2$.

3.- Calcular la integral

$$\int_C \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}dz$$

donde C es la circunferencia a)$|z|=2$, recorrida en sentido positivo.

4.- Usar el teorema de reducción a un solo residuo para evaluar la integral de $f(z)$ sobre la circunferencia $|z|=3$, orientada positivamente, con

$$a)f(z)=\frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)}, \qquad b)f(z)=\frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)} \qquad c)f(z)=\frac{z^3e^{1/z}}{1+z^3}$$

5.- Probar que:

$$a)\text{Res}_{z=z_0}(z\sec z)=(-1)^{n+1}z_n, \text{ donde } z_n=\frac{\pi}{2}+n\pi \ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

$$b)\text{Res}_{z=z_0}(\tanh z)=1, \text{ donde } z_n=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i \ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

6.- Sea C la circunferencia $|z|=2$ orientada positivamente. Evaluar cada integral

$$a)\int_C \tan z dz, \qquad b)\int_C \frac{dz}{\sinh 2z}$$

7.- Sea C_N el contorno orientado positivamente, del cuadrado acotado por las rectas $x=\pm(N+1/2)\pi$, $y=\pm(N+1/2)\pi$, donde N es un entero positivo. Probar que

$$\int_{C_N} \frac{dz}{z^2\sin z}=2\pi i\left[\frac{1}{6}+2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]$$

Entonces usando el hecho de que la integral tiende a cero cuando N tiende a infinito, deducir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{23}.$$